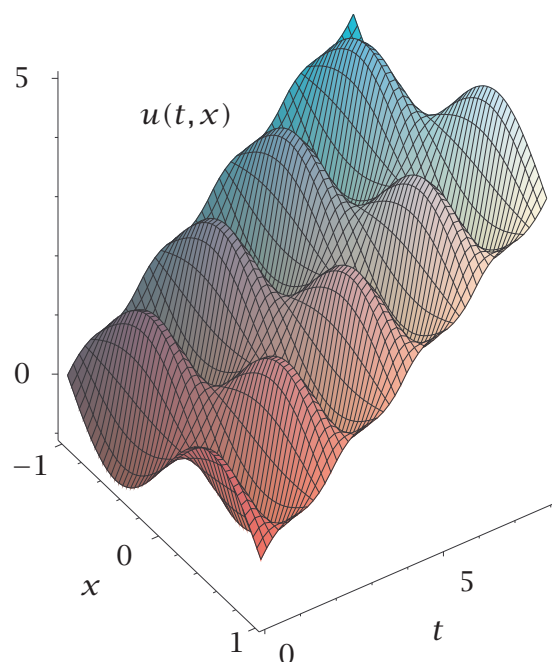


# Ecuaciones Diferenciales II



**Manuel Mañas Baena y Luis Martínez Alonso**

# Índice general

<b>1. Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales</b>	<b>1</b>
1.1. Definición de EDP. EDP lineales . . . . .	1
1.1.1. Aspectos generales . . . . .	1
1.1.2. EDP relevantes en la Física . . . . .	5
1.1.3. Cambio de variables independientes . . . . .	6
1.2. Condiciones de contorno o frontera. Condiciones iniciales . . . . .	8
1.2.1. Dominios. Fronteras . . . . .	8
1.2.2. Condiciones de contorno . . . . .	9
1.2.3. Condiciones iniciales . . . . .	15
1.2.4. Funciones diferenciables . . . . .	16
1.3. Existencia local de soluciones de EDP . . . . .	17
1.3.1. Planteamiento del problema . . . . .	17
Funciones analíticas . . . . .	17
1.3.2. El teorema de Cauchy-Kovalevskaya . . . . .	19
1.4. Problemas de Cauchy. Hipersuperficies características . . . . .	24
1.4.1. Planteamiento del problema . . . . .	24
1.4.2. Curvas características para EDP de primer orden . . . . .	26
1.4.3. Curvas características para EDP de segundo orden . . . . .	28
1.5. Solución general. Método de la solución completa . . . . .	32
1.5.1. Método de la solución completa para ecuaciones de primer orden . . . . .	32
1.5.2. El método de la hodógrafa . . . . .	36
1.6. Operadores diferenciales. Problemas lineales . . . . .	36
1.6.1. Operadores diferenciales . . . . .	37
1.6.2. Operadores de frontera y de condiciones iniciales . . . . .	39
1.6.3. Problemas lineales . . . . .	40
1.6.4. Características . . . . .	41
1.7. Cuestiones, problemas y ejercicios . . . . .	41
1.7.1. Cuestiones . . . . .	41
1.7.2. Problemas . . . . .	45
1.7.3. Ejercicios . . . . .	47
<b>2. Teoría espectral de operadores diferenciales. Análisis de Fourier</b>	<b>51</b>
2.1. Producto escalar en espacios funcionales . . . . .	51
2.1.1. Producto escalar . . . . .	52

2.1.2. Cambios de coordenadas . . . . .	54
2.2. Conjuntos ortogonales de funciones . . . . .	55
2.2.1. Desarrollos en serie de funciones ortogonales . . . . .	56
2.2.2. Conjuntos ortogonales completos . . . . .	58
2.3. Operadores diferenciales simétricos . . . . .	58
2.4. Autovalores y autofunciones. Operadores simétricos . . . . .	59
2.4.1. Problemas de autovalores . . . . .	59
2.4.2. Autovalores y autofunciones de operadores simétricos . . . . .	61
2.5. Operadores de Sturm-Liouville en una dimensión . . . . .	62
2.5.1. Caso regular . . . . .	62
Carácter simétrico . . . . .	63
Espectro . . . . .	64
2.5.2. Caso singular . . . . .	65
2.5.3. Operadores de Schrödinger, Legendre y Bessel . . . . .	66
2.6. Operadores de Sturm-Liouville en varias dimensiones . . . . .	70
2.7. Series de Fourier . . . . .	72
2.7.1. Bases trigonométricas de Fourier . . . . .	72
2.7.2. Desarrollos de Fourier . . . . .	75
2.7.3. Convergencia de series de Fourier . . . . .	83
2.8. Transformada de Fourier . . . . .	88
2.8.1. Definición de la transformada de Fourier . . . . .	88
2.8.2. Propiedades de la transformada de Fourier . . . . .	93
2.8.3. Transformadas seno y coseno . . . . .	98
Transformada de Fourier en $\mathbb{R}^3$ para funciones radiales . . . . .	100
2.9. Cuestiones, problemas y ejercicios . . . . .	100
2.9.1. Cuestiones . . . . .	100
2.9.2. Problemas . . . . .	112
2.9.3. Ejercicios . . . . .	116
<b>3. Métodos de separación de variables y desarrollo en autofunciones . . . . .</b>	<b>119</b>
3.1. El método de separación de variables . . . . .	119
3.1.1. Operadores diferenciales separables . . . . .	120
3.1.2. Soluciones de EDP homogéneas . . . . .	121
3.1.3. Soluciones de problemas de contorno homogéneos . . . . .	123
3.1.4. El MSV y las ecuaciones de la física matemática . . . . .	127
3.2. La ecuación de Helmholtz en coordenadas cartesianas . . . . .	129
3.2.1. Partícula cuántica en una caja impenetrable . . . . .	129
3.2.2. Partícula cuántica en una caja con condiciones periódicas . . . . .	131
3.2.3. Fluido en una tubería paralelepípedica . . . . .	132
3.3. La ecuación de Helmholtz en coordenadas cilíndricas . . . . .	134
3.3.1. Coordenadas polares . . . . .	136
3.3.2. Partícula cuántica en una cuña cilíndrica impenetrable . . . . .	136
3.3.3. Fluido en una tubería cilíndrica . . . . .	139
3.4. La ecuación de Helmholtz en coordenadas esféricas . . . . .	141
3.4.1. Resolución de la ecuación angular . . . . .	142
3.4.2. Resolución de la ecuación radial . . . . .	147
3.4.3. Partícula cuántica en una caja esférica . . . . .	150
3.4.4. Fluido en el interior de una caja esférica . . . . .	152

3.5. El método de desarrollo en autofunciones (MDA) . . . . .	153
3.5.1. El MDA en problemas inhomogéneos . . . . .	153
3.5.2. Ejemplos en dos dimensiones . . . . .	157
3.5.3. El método de la transformada de Fourier . . . . .	167
3.6. Problemas de contorno en electrostática y mecánica de fluidos . . . . .	174
3.6.1. Unicidad . . . . .	174
3.6.2. El MDA en problemas de electrostática y mecánica de fluidos con simetría esférica . . . . .	177
3.6.3. Esfera conductora cargada en equilibrio electrostático en un campo eléctrico constante . . . . .	178
3.6.4. Fluido en movimiento uniforme deformado por una bola esférica .	182
3.7. Cuestiones, problemas y ejercicios . . . . .	183
3.7.1. Cuestiones . . . . .	183
3.7.2. Problemas . . . . .	185
3.7.3. Ejercicios . . . . .	200
<b>A. Resumen de funciones especiales</b>	<b>205</b>
<b>B. Soluciones de la ecuación de Helmholtz: <math>\Delta u + k^2 u = 0</math></b>	<b>209</b>

# CAPÍTULO 1

## Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales

En este primer capítulo se presentan las definiciones generales sobre ecuaciones en derivadas parciales (EDP) y se enuncia uno de los teoremas de existencia y unicidad básicos, debido a Cauchy y a Kovalevskaya. También se introducen los problemas de Cauchy y la noción de hipersuperficie característica y se dedica una sección a definiciones básicas sobre operadores diferenciales y problemas de EDP lineales asociados.

1. Definición de EDP. EDP lineales
2. Condiciones de contorno. Condiciones iniciales
3. Existencia local de soluciones de EDP
4. Problemas de Cauchy. Hipersuperficies características
5. Operadores diferenciales. Problemas lineales.

### 1.1. Definición de EDP. EDP lineales

En esta sección, tras una introducción de carácter general sobre números complejos y derivadas parciales, presentamos algunas de las EDP más relevantes en Física. Por último, analizamos como se transforman las EDP ante cambios de coordenadas.

#### 1.1.1. Aspectos generales

Salvo mención de lo contrario siempre consideraremos funciones dependientes de un cierto número de variables reales y que toman valores complejos. Utilizaremos dos tipos de notación dependiendo de la situación.

**Notación extendida** Escribiremos  $u = u(x, y, \dots) = u_1(x, y, \dots) + i u_2(x, y, \dots)$  para denotar una función que depende de las variables reales  $(x, y, \dots)$ , que toma

números complejos

valores complejos cuya parte real e imaginaria vienen dadas por

$$\operatorname{Re} u = u_1, \quad \operatorname{Im} u = u_2.$$

Como números complejos, los valores de la función  $u$  pueden conjugarse y poseen módulo y argumento:

$$\bar{u} = u_1 - i u_2, \quad |u| = +\sqrt{u_1^2 + u_2^2}, \quad \arg u = \arctan \frac{u_2}{u_1}.$$

Es útil recordar que:

$$|u|^2 = \bar{u}u, \quad u = |u| e^{i \arg u}.$$

Recordemos que en el álgebra de números complejos, dados  $a, b \in \mathbb{R}$ , se tienen las fórmulas de Euler:

$$e^{ib} = \cos b + i \sin b, \quad e^{a+ib} = e^a e^{ib} = e^a (\cos b + i \sin b).$$

números comple-  
jos, fórmulas de  
Euler

Frecuentemente, en las aplicaciones en la Física, una de las variables a tener en cuenta es el tiempo  $t$ , así que en tales ocasiones denotaremos mediante  $(t, x, y, \dots)$  a las variables de las que dependen nuestras funciones.

Las derivadas de  $u$ , cuando existan, se obtendrán derivando las partes real e imaginaria de  $u$  y se denotarán como muestran los ejemplos siguientes:

derivadas parcia-  
les

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u_1}{\partial t} + i \frac{\partial u_2}{\partial t}, & u_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + i \frac{\partial u_2}{\partial x}, \\ u_{xx} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + i \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, & u_{xy} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + i \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

Supondremos siempre que las funciones que manejamos admiten derivadas hasta el orden requerido por las operaciones que debamos efectuar. En particular tal orden ha de ser suficiente para que el resultado de una derivación múltiple sea independiente del orden en que efectuemos las derivaciones individuales. Por ejemplo:

$$u_{xxyxzy} = u_{xxxyyz} = u_{zxyxyx}.$$



## Ejemplos

1. Sea

$$u(x, y) = xy + i e^{x^2+y^2}.$$

En este caso

$$u_1(x, y) = xy, \quad u_2(x, y) = e^{x^2+y^2},$$

por lo tanto

$$\bar{u} = xy - i e^{x^2+y^2}, \quad |u| = \sqrt{(xy)^2 + e^{2(x^2+y^2)}}$$

Se calcula inmediatamente que

$$u_x = y + 2ix e^{x^2+y^2}, \quad u_{xx} = i(2 + 4x^2)e^{x^2+y^2}.$$

2. Sea

$$u(x, y) = e^{xy+i(x^2+y^2)}.$$

Utilizando las fórmulas de Euler

$$u = e^{xy}(\cos(x^2 + y^2) + i \operatorname{sen}(x^2 + y^2)),$$

luego

$$u_1 = e^{xy} \cos(x^2 + y^2), \quad u_2 = e^{xy} \operatorname{sen}(x^2 + y^2),$$

$$|u| = e^{xy}, \quad \arg u = x^2 + y^2.$$

Así, las derivadas de primer orden son

$$u_x = (y + i 2x)e^{xy}(\cos(x^2 + y^2) + i \operatorname{sen}(x^2 + y^2)),$$

$$u_y = (x + i 2y)e^{xy}(\cos(x^2 + y^2) + i \operatorname{sen}(x^2 + y^2)).$$

**Notación abreviada** En una notación más compacta las funciones las escribiremos en la forma  $u = u(x) = u_1(x) + i u_2(x)$ , donde

$$x = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}),$$

denota un punto de  $\mathbb{R}^n$ . Frecuentemente, aunque no siempre, la variable  $x_0$  será identificada con una variable tiempo  $t$ . Para las derivadas escribiremos

notación abreviada

$$D^\alpha u := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_0^{\alpha_0} \partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}}, \quad |\alpha| = \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-1},$$

donde aparecen índices vectoriales

$$\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{Z}_+^n \subset \mathbb{R}^n,$$

con  $n$  componentes enteras  $\alpha_i \geq 0$ . Obsérvese que  $|\alpha|$  es el orden de la derivada  $D^\alpha u$ . Por definición si  $\alpha = (0, 0, \dots, 0)$ , entonces  $D^\alpha u \equiv u$ .

La relación entre los dos tipos de notación es fácil de establecer. Por ejemplo si  $(x_0, x_1, x_2, x_3) = (t, x, y, z)$ :

$$u_{xxzyz} = D^\alpha u, \quad \alpha = (0, 2, 1, 2).$$

Cuando tengamos una sola variable independiente  $x$ , usaremos la notación

$$D^n u := \frac{d^n u}{dx^n}.$$

EDP

Para definir el concepto de EDP es conveniente usar la notación abreviada.

**DEFINICIÓN 1.1.1.** Una EDP es una ecuación de la forma:

$$F(x, D^\alpha u) = 0, \quad (1.1)$$

siendo  $F$  una función que depende de  $x = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$  ( $n > 1$ ), y de un número finito de derivadas  $D^\alpha u$ . La nomenclatura es la siguiente:

- i) Las variables  $x_i$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ , se denominan variables independientes de la EDP.
- ii) La función incógnita  $u$  de la EDP se denomina variable dependiente de la EDP.
- iii) Si  $r$  es el orden máximo de las derivadas  $D^\alpha u$  de las que depende la función  $F$ , entonces  $r$  es por definición el orden de la EDP.

Aunque pueden tratarse situaciones más generales de gran interés, aquí sólo consideraremos EDP correspondientes a funciones  $F$  que dependen polinómicamente en las variables  $D^\alpha u$ .<sup>1</sup> No impondremos tal tipo de restricciones a la dependencia respecto de las variables  $x_i$ . En particular, si  $F$  es un polinomio de grado uno en  $D^\alpha u$  se dice que la EDP es una EDP lineal.<sup>2</sup> En ese caso la EDP es de la forma

$$\sum_{\alpha}' a_{\alpha}(x) D^{\alpha} u - f(x) = 0, \quad (1.2)$$

donde  $\sum_{\alpha}'$  significa que la suma se extiende a un conjunto finito de multi-índices  $\alpha$  con  $|\alpha| \geq 0$ . Las funciones  $a_{\alpha}(x)$  y  $f(x)$  se suponen dadas. Normalmente cuando tratamos con una ecuación como (1.2) la escribimos como

$$\sum_{\alpha}' a_{\alpha}(x) D^{\alpha} u = f(x),$$

y nos referimos al término  $f(x)$  como el *término inhomogéneo* de la ecuación. Si  $f(x) \equiv 0$  diremos que la EDP lineal es *homogénea*.

En general las EDP no lineales son mucho más difíciles de tratar que las lineales. Para considerar EDP concretas la notación extendida es más conveniente.

## Ejemplos

1. La EDP

$$u_x + e^{x+y} u_y - u = x^2 y^2,$$

es lineal de orden 1.

2. La EDP

$$u_{xx} u + u_y + xy = 0,$$

es no lineal, obsérvese el término  $u_{xx} u$ , y de orden 2.

<sup>1</sup>Sin embargo, existen situaciones físicas en que aparecen ecuaciones más generales. Por ejemplo, la ecuación de *sine-Gordon*:

$$u_{tt} - u_{xx} = \sin u$$

se utiliza en la descripción de la transparencia auto-inducida o en el estudio de las uniones Josephson. Así mismo, también es relevante en geometría diferencial.

<sup>2</sup>Una extensión del concepto de EDP lineal es el de EDP cuasi-lineal, ahora se exige linealidad tan sólo en las derivadas de orden más alto.



### 1.1.2. EDP relevantes en la Física

La Física está repleta de EDP lineales y no lineales. Tanto en electromagnetismo como en mecánica cuántica las ecuaciones básicas son lineales, pero en otras áreas, como la dinámica de medios continuos o la relatividad general, las ecuaciones fundamentales son no lineales.

Hay cuatro ejemplos de EDP lineales, todas ellas de segundo orden, a las que vamos a dedicar un interés particular en este curso:

#### 1. La ecuación de Poisson

Poisson

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = f,$$

siendo  $f = f(x, y, z)$  una función dada. Si  $f \equiv 0$  la EDP se conoce como ecuación de Laplace. Ambas EDP aparecen a menudo en electrostática y en mecánica de fluidos.

#### 2. La ecuación de ondas

ondas

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}),$$

donde  $c$  es un número real positivo que representa la velocidad de propagación de las ondas.

#### 3. La ecuación de Schrödinger

Schrödinger

$$i\hbar u_t = -\frac{\hbar^2}{2m}(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + q(x, y, z)u,$$

que describe la dinámica de una partícula de masa  $m$  en un campo de fuerzas con función potencial  $q = q(x, y, z)$ . El símbolo  $\hbar$  representa la constante de Planck normalizada. Es de observar la presencia del número imaginario  $i$  en el coeficiente de  $u_t$ . Este hecho es el principal motivo por el que en este curso consideramos funciones con valores complejos.

#### 4. La ecuación del calor

calor

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}),$$

es relevante en procesos de difusión térmica y de difusión de fluidos en general. El símbolo  $a^2$  representa el coeficiente de difusión.

Para escribir de forma abreviada las ecuaciones anteriores es conveniente usar la notación del operador Laplaciano:

$$\Delta u := u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}.$$

Así se obtiene:

##### 1. Ecuación de Poisson en 3 dimensiones:

$$\Delta u = f.$$

2. Ecuación de ondas en 1+3 dimensiones:<sup>3</sup>

$$u_{tt} = c^2 \Delta u.$$

3. Ecuación de Schrödinger en 1+3 dimensiones:

$$i \hbar u_t = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta u + qu.$$

4. La ecuación del calor en 1+3 dimensiones:

$$u_t = a^2 \Delta u.$$

En ocasiones consideraremos versiones simplificadas de las ecuaciones anteriores en las que  $u$  no depende de algunas de las variables  $(x, y, z)$ . Así, una versión en 1+2 dimensiones de las ecuaciones de ondas, Schrödinger o del calor es una EDP en que suponemos que  $u$  depende de  $(t, x, y)$  solamente.

Aunque no vamos a tratar tales problemas en este curso, hay muchos ejemplos de EDP no lineales de gran importancia por sus aplicaciones en la Física. Los métodos que se emplean en su estudio son muy diferentes de los desarrollados para las EDP lineales. Solo mostraremos un par de EDP no lineales que gozan de gran popularidad actualmente

Korteweg–de  
Vries

1. La ecuación de Korteweg–de Vries

$$u_t + u_{xxx} + uu_x = 0,$$

con aplicaciones en hidrodinámica, física del estado sólido y física del plasma.

Schrödinger no li-  
neal

2. La ecuación de Schrödinger no lineal

$$i u_t = -u_{xx} + |u|^2 u,$$

con relevancia en diversos campos entre los que destaca la óptica no lineal.

cambios de coor-  
denadas

### 1.1.3. Cambio de variables independientes

Dada una EDP (1.1), una de las manipulaciones más frecuentes que debemos efectuar es determinar la forma que adquiere cuando efectuamos un cambio de variables independientes  $x \mapsto y = y(x)$  con ecuaciones de transformación:

$$y_i = y_i(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}), \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

que siempre supondremos invertible  $y \mapsto x = x(y)$ , con ecuaciones de transformación inversa

$$x_i = x_i(y_0, y_1, \dots, y_{n-1}), \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Para simplificar no utilizaremos un nuevo símbolo de función para la función compuesta  $u(x(y))$ , que simplemente denotaremos  $u(y)$ .

<sup>3</sup>A veces en Física se utiliza el d'Alambertiano:  $\square u = u_{tt} - c^2 \Delta u$ , tomando la ecuación de ondas la forma  $\square u = 0$ .

La forma que toma (1.1) en las nuevas variables se determina sustituyendo en  $F(x, D^\alpha u)$  las variables  $x$  por  $x(y)$ , y las derivadas respecto de  $x$  ( $D^\alpha u$ ) por sus expresiones en términos de derivadas respecto de  $y$ . Para esto último hay que utilizar la regla de la cadena. Las expresiones de las derivadas de ordenes uno y dos son

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{i'} \frac{\partial u}{\partial y_{i'}} \frac{\partial y_{i'}}{\partial x_i},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sum_{j'} \frac{\partial y_{j'}}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial y_{j'}} \right) = \sum_{i'} \sum_{j'} \frac{\partial y_{i'}}{\partial x_i} \frac{\partial y_{j'}}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial y_{i'} \partial y_{j'}} + \sum_{j'} \frac{\partial^2 y_{j'}}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial u}{\partial y_{j'}}$$

En ocasiones un cambio de variables puede convertir una EDP en otra más simple. El ejemplo clásico es la ecuación de ondas en 1+1 dimensiones.



### Ejemplos

i) Sea la EDP:

$$u_{tt} - u_{xx} = 0.$$

Efectuemos el cambio de variable:

$$y_1 = t + x, \quad y_2 = t - x.$$

con cambio inverso:

$$t = \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \quad x = \frac{1}{2}(y_1 - y_2)$$

Inmediatamente se obtiene:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{y_1} \frac{\partial y_1}{\partial t} + u_{y_2} \frac{\partial y_2}{\partial t} = u_{y_1} + u_{y_2}, \\ u_x &= u_{y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x} + u_{y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x} = u_{y_1} - u_{y_2}, \\ u_{tt} &= \left( \frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial}{\partial y_2} \right) (u_{y_1} + u_{y_2}) = u_{y_1 y_1} + u_{y_2 y_2} + 2u_{y_1 y_2}, \\ u_{xx} &= \left( \frac{\partial}{\partial y_1} - \frac{\partial}{\partial y_2} \right) (u_{y_1} - u_{y_2}) = u_{y_1 y_1} + u_{y_2 y_2} - 2u_{y_1 y_2}. \end{aligned}$$

Como consecuencia la EDP se escribe:

$$4u_{y_1 y_2} = 0.$$

En su nueva forma la EDP puede integrarse y se obtiene la solución:

$$u = f(y_1) + g(y_2) = f(x + t) + g(t - x),$$

donde  $f$  y  $g$  son funciones arbitrarias.

ii) Formulemos la EDP

$$u_x + u_y = x^2 y,$$

en coordenadas polares:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan \frac{y}{x}.$$

Aplicando la regla de la cadena:

$$u_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} u_r - \frac{y}{x^2 + y^2} u_\theta = \cos \theta u_r - \frac{\sin \theta}{r} u_\theta,$$

$$u_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} u_r + \frac{x}{x^2 + y^2} u_\theta = \sin \theta u_r + \frac{\cos \theta}{r} u_\theta.$$

Luego la EDP se escribe:

$$(\cos \theta + \sin \theta) u_r + \frac{1}{r} (\cos \theta - \sin \theta) u_\theta = r^3 \sin \theta \cos^2 \theta.$$

## 1.2. Condiciones de contorno o frontera. Condiciones iniciales

### 1.2.1. Dominios. Fronteras

dominios

En general cuando consideramos una EDP (1.1) la función incógnita  $u = u(x)$  se supone definida sobre un conjunto dado  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ . Supondremos siempre que  $\Omega$  satisface las dos condiciones siguientes:

- i)  $\Omega$  es un conjunto abierto. Esto es, para todo punto  $a \in \Omega$  existe un radio  $r > 0$  tal que todo punto  $x \in \mathbb{R}^n$  cuya distancia a  $a$  es inferior a  $r$  ( $d(x, a) < r$ ) pertenece a  $\Omega$ .
- ii)  $\Omega$  es conexo.
- Es decir, no es posible encontrar dos conjuntos abiertos no vacíos  $\Omega_i$ , ( $i = 1, 2$ ) tales que  $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$  y  $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$ .

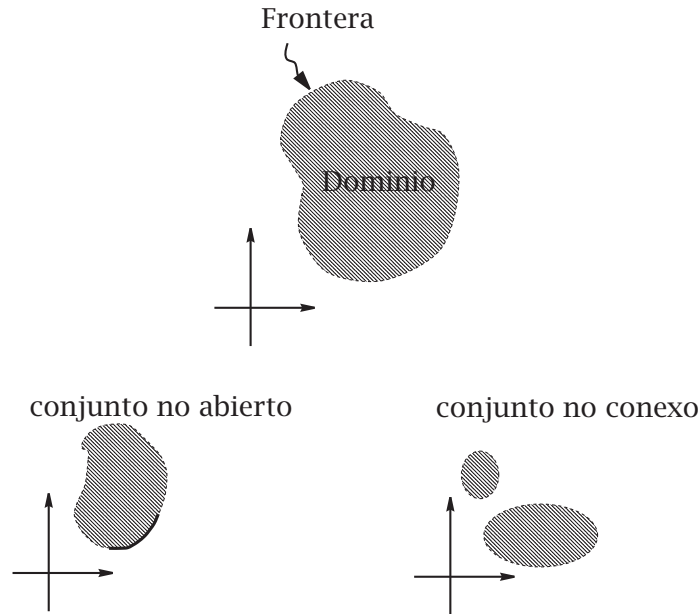
frontera

En tal caso diremos que  $\Omega$  es un *dominio* de  $\mathbb{R}^n$ . La *frontera*  $S(\Omega)$  de  $\Omega$  es el conjunto formado por los puntos  $a \in \mathbb{R}^n$  tales que para todo radio  $r > 0$ , existen puntos  $x$ , tanto dentro  $x \in \Omega$  como fuera  $x \notin \Omega$ , tales que  $d(x, a) < r$ . Obviamente la propiedad i) significa que  $\Omega$  no tiene puntos en común con su frontera  $S(\Omega)$ . En cuanto a la propiedad ii), podemos interpretarla como la prohibición de que  $\Omega$  pueda dividirse en dos sectores separados. El conjunto unión

$$\overline{\Omega} = \Omega \cup S(\Omega),$$

se denomina *el cierre de  $\Omega$* .

A continuación mostramos diagramas de un dominio y de conjuntos que no son dominios dado que violan la propiedad i) o la propiedad ii).



### 1.2.2. Condiciones de contorno

Dada una EDP sobre un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ :

$$F(x, D^\alpha u) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (1.3)$$

normalmente se nos pide no sólo que encontremos una función  $u = u(x)$  que satisfaga la EDP en todo punto de  $\Omega$ , sino también que tal función satisfaga una serie de condiciones

$$f_i(x, D^\alpha u) = 0, \quad x \in S_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

donde los símbolos  $S_i$  denotan partes de la frontera  $S(\Omega)$  de  $\Omega$ , y las  $f_i$  son funciones dependientes de las variables  $x_i$ , y de un número finito de derivadas  $D^\alpha u$  con  $|\alpha| \geq 0$ . Condiciones de esta clase se denominan **condiciones de contorno** —también se conocen como condiciones de frontera, en este texto utilizaremos ambas denominaciones—. Solo consideraremos condiciones de contorno en las que las funciones  $f_i$  son polinomios de grado uno en las variables  $D^\alpha u$  (condiciones de contorno lineales). Es decir, de la forma

$$\sum_{\alpha} b_{i,\alpha}(x) D^\alpha u - g_i(x) = 0, \quad x \in S_i,$$

o bien

$$\sum_{\alpha} b_{i,\alpha} D^\alpha u|_{S_i} = g_i.$$

Un problema consistente en resolver una EDP sobre un dominio  $\Omega$  y un conjunto de condiciones de contorno se denomina **problema de contorno** —o problema de frontera—.

condiciones de  
contorno



### Ejemplos

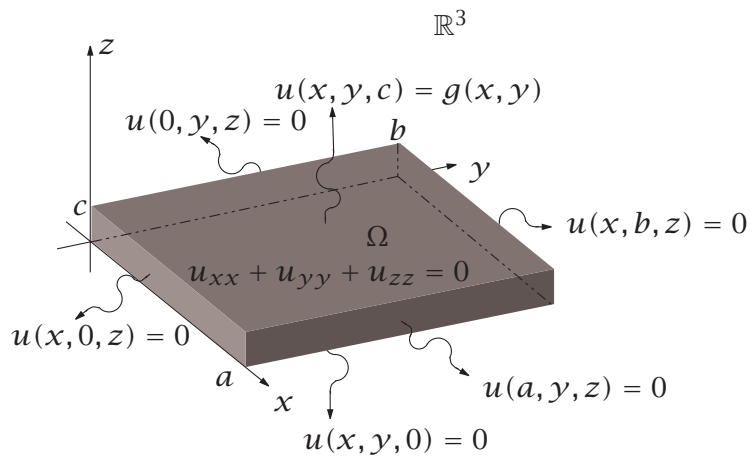
1. **La ecuación de Laplace en una caja rectangular.** Consideramos la EDP

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0,$$

en  $\Omega = (0, a) \times (0, b) \times (0, c)$ . Las condiciones de contorno son

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) &= 0, & u(x, y, c) &= g(x, y), \\ u(0, y, z) &= 0, & u(a, y, z) &= 0, \\ u(x, 0, z) &= 0, & u(x, b, z) &= 0. \end{aligned}$$

La solución  $u(x, y, z)$  a este problema modela el potencial electrostático en una caja con todas sus caras a potencial cero mientras que la sexta tiene el potencial  $g(x, y)$ .



2. Una EDP no siempre admite la imposición de determinadas condiciones de contorno. A título de ejemplo podemos considerar la ecuación de ondas

$$u_{xy} = 0$$

en el cuadrado  $(x, y) \in (0, 1) \times (0, 1)$ . Impongamos las condiciones de contorno siguientes

$$u(x, 0) = f_1(x), \quad u(x, 1) = f_2(x), \quad u(0, y) = g_1(y), \quad u(1, y) = g_2(y).$$

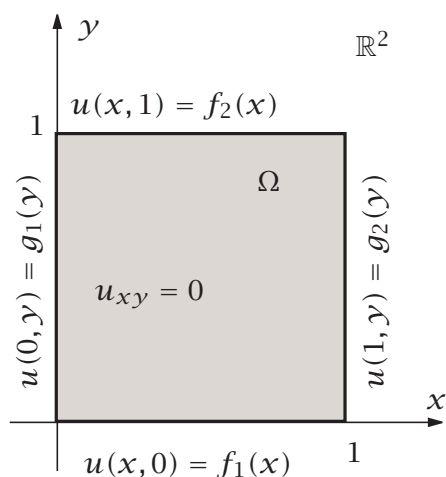
Veamos ahora que este problema puede no tener solución. Como se satisface la EDP  $u_{xy} = 0$  la función  $u_x$  no depende de  $y$ ,  $u_x = u_x(x)$ , y por ello debemos tener

$$f'_1 = f'_2,$$

y un argumento análogo conduce a

$$g'_1 = g'_2.$$

Por tanto, para que el problema de contorno tenga solución es necesario que se satisfagan condiciones adicionales sobre los datos de frontera. Este problema está relacionado con las curvas características que discutiremos más adelante.



En problemas sobre un dominio  $\Omega$  en el espacio  $\mathbb{R}^3$  se utiliza la siguiente nomenclatura para las condiciones de frontera más simples sobre una superficie  $S$  contenida en  $S(\Omega)$ :

1. **Condición de Dirichlet:**

$$u|_S = g.$$

2. **Condición de Neumann:**

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|_S = g,$$

siendo

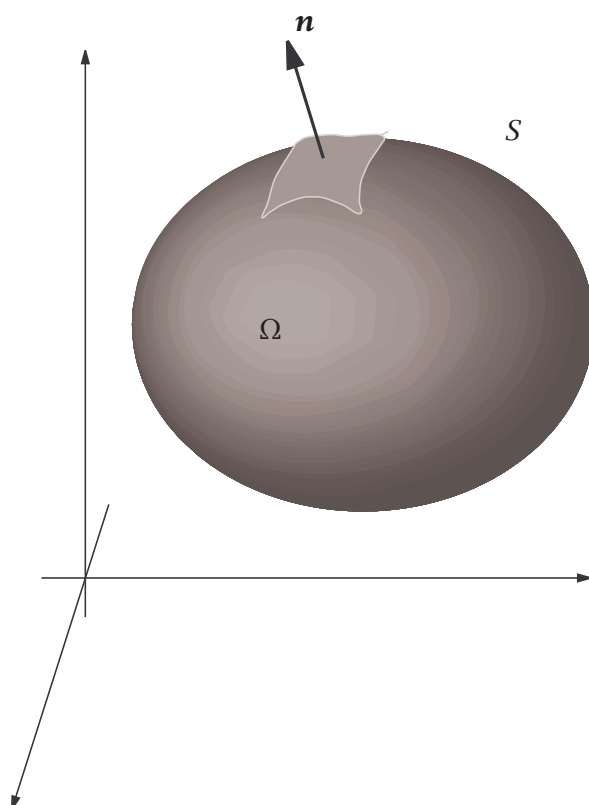
$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} := \mathbf{n} \cdot \nabla u = n_1 u_x + n_2 u_y + n_3 u_z,$$

donde  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$  es el campo de vectores normales a la superficie  $S$ .

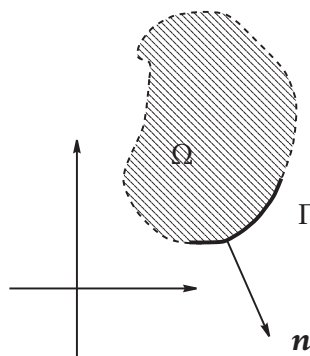
3. **Condición mixta**

$$\left( au + b \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) \Big|_S = g.$$

Aquí  $a$  y  $b$  denotan funciones dadas.



En ocasiones consideraremos versiones en  $\mathbb{R}^2$  de las anteriores condiciones de contorno. En tales casos  $\Omega$  será un recinto del plano,  $S$  una curva contenida en  $S(\Omega)$  y en lugar de la notación  $S, S(\Omega)$  preferiremos usar  $\Gamma, \Gamma(\Omega)$  respectivamente.



En todo caso, siempre que trabajemos con una condición de contorno sobre una parte  $S$  de la frontera de  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , supondremos que  $S$  puede describirse mediante una ecuación implícita:

$$f_S(x) = 0,$$

tal que

$$\nabla f_S(x) \neq \mathbf{0}, \quad x \in S.$$

normal unitaria

Podemos definir un campo normal unitario según

$$\mathbf{n}(x) := \frac{\nabla f_S(x)}{\|\nabla f_S(x)\|}.$$



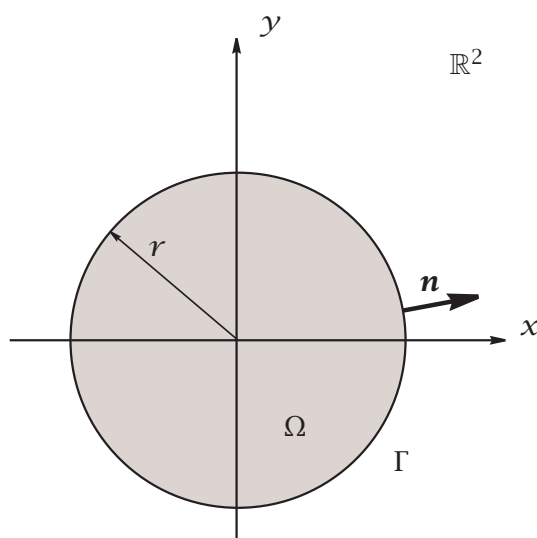
**Ejemplos** Los ejemplos siguientes muestran los campos de vectores normales y las correspondientes operaciones de derivación en la dirección del vector normal.



1.  $\Omega \equiv$  círculo con centro el origen y radio  $r$  en  $\mathbb{R}^2$ ,  $\Gamma = \Gamma(\Omega)$ .

$$f_{\Gamma}(x, y) = x^2 + y^2 - r^2,$$

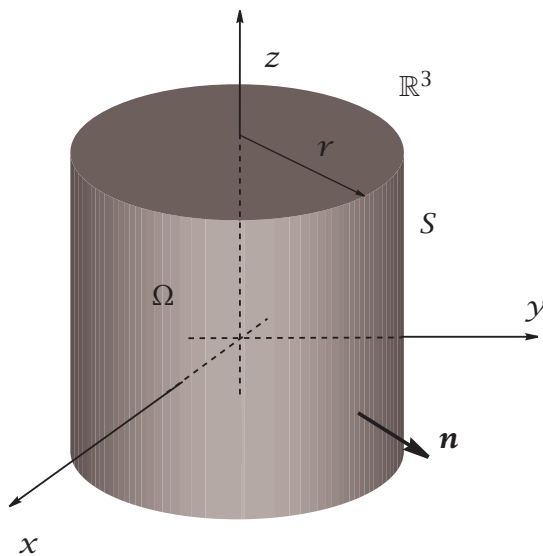
$$\mathbf{n} = \frac{(2x, 2y)}{\|(2x, 2y)\|} \Big|_{\Gamma} = \frac{1}{r}(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma} = \frac{1}{r}(xu_x + yu_y) = u_r.$$



2.  $\Omega \equiv$  interior del cilindro con eje  $OZ$  y radio  $r$  en  $\mathbb{R}^3$ ,  $S = S(\Omega)$ .

$$f_S(x, y, z) = x^2 + y^2 - r^2,$$

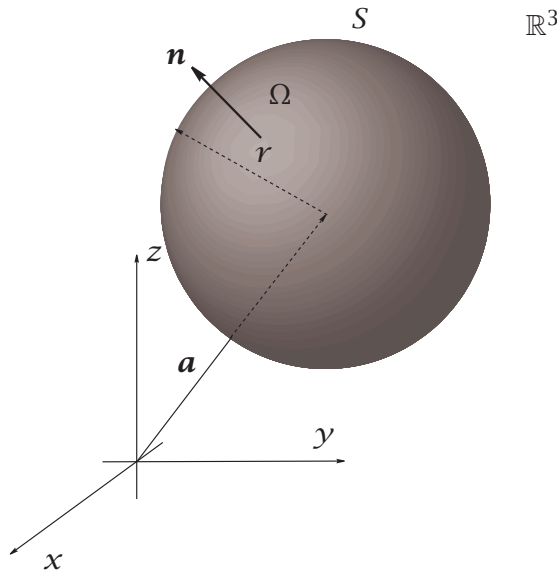
$$\mathbf{n} = \frac{(2x, 2y, 0)}{\|(2x, 2y, 0)\|} \Big|_{\Gamma} = \frac{1}{r}(x, y, 0), \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_S = \frac{1}{r}(xu_x + yu_y) = u_r.$$



3.  $\Omega \equiv$  interior de la esfera centrada en  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$  y radio  $r$  en  $\mathbb{R}^3$ ,  $S = S(\Omega)$ .

$$f_S(x, y, z) = (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (z - a_3)^2 - r^2,$$

$$\mathbf{n} = \frac{1}{r}(x - a_1, y - a_2, z - a_3), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|_S = \frac{1}{r}((x - a_1)u_x + (y - a_2)u_y + (z - a_3)u_z).$$



Existe otro tipo de condiciones de contorno asociadas con pares apropiados de hipersuperficies de la frontera de  $\Omega$ . Supongamos dos hipersuperficies  $S_i$ ,  $i = 1, 2$  de  $\mathbb{R}^n$  contenidas en  $S(\Omega)$ , tales que existe una aplicación biyectiva entre ellas

$$\begin{aligned} \sigma : S_1 &\longrightarrow S_2, \\ x &\mapsto \sigma(x), \end{aligned}$$

tal que tanto  $\sigma$  como su inversa, expresadas en coordenadas locales de sus superficies dominio, son funciones que admiten todas las derivadas. Una **condición de contorno periódica** viene expresada como una ecuación de la forma

condiciones  
de contorno  
periódicas

$$f(x, D^\alpha u(x)) = f(\sigma(x), D^\alpha u(\sigma(x))), \quad x \in S_1.$$

### 1.2.3. Condiciones iniciales

Otro tipo de condiciones que se suelen exigir a las soluciones de una EDP son las denominadas *condiciones iniciales* respecto de una de las variables independientes que denotaremos  $t$ . Normalmente son un conjunto de condiciones de la forma:

$$u|_{t=t_0} = \Phi_0, \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=t_0} = \Phi_1, \dots, \left. \frac{\partial^{r-1} u}{\partial t^{r-1}} \right|_{t=t_0} = \Phi_{r-1},$$

donde  $r \geq 0$  y las funciones  $\Phi_i$  dependen del resto de variables independientes. En general, las condiciones iniciales no son condiciones de contorno ya que también se consideran situaciones en las que el conjunto determinado por la ecuación  $t = t_0$  puede estar en el *interior* de  $\Omega$ .

condiciones  
iniciales

En problemas físicos en los que se analiza la evolución de un sistema suelen coexistir tanto condiciones de contorno como iniciales.

Los siguientes ejemplos muestran un par de situaciones genéricas diferentes.



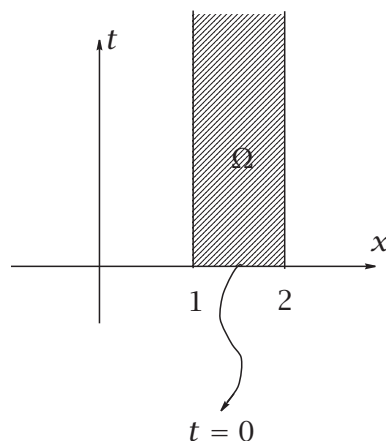
### Ejemplos

1. Sea la ecuación del calor en 1+1 dimensiones:

$$u_t = u_{xx},$$

sobre el dominio

$$\Omega = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0, 1 < x < 2\}.$$



Podemos imponer las condiciones

$$u|_{t=0} = (x-1)(x-2), \quad u|_{x=1} = 0, \quad u|_{x=2} = 0.$$

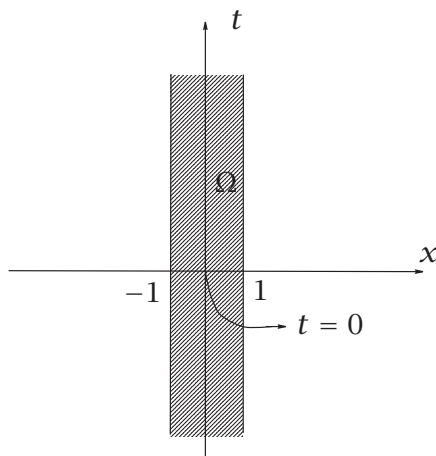
En este caso la condición inicial es también condición de contorno.

2. Sea la ecuación de Schrödinger en 1+1 dimensiones:

$$i u_t = -u_{xx},$$

sobre el dominio

$$\Omega = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < t < \infty, -1 < x < 1\}.$$



Podemos imponer las condiciones

$$u|_{t=0} = \sin(\pi x)e^{-x^2}, \quad u|_{x=-1} = 0, \quad u|_{x=1} = 0.$$

En este caso la condición inicial no es condición de contorno.

#### 1.2.4. Funciones diferenciables

funciones  
dife-  
renciables

Cuando se buscan soluciones de un problema de contorno se consideran diferentes tipos de espacios funcionales en donde investigar la existencia de tales soluciones. Uno de los espacios más utilizados es el espacio  $C^\infty(\Omega)$  de las **funciones diferenciables** en  $\Omega$ . Por definición una función  $f = f(x)$  pertenece a  $C^\infty(\Omega)$  si admite todas las derivadas parciales de todos los ordenes  $D^\alpha f(x)$  en todos los puntos  $x \in \Omega$ . Las propiedades de las funciones diferenciables que más nos interesan ahora son

1) Si  $f, g \in C^\infty(\Omega)$  entonces las funciones

$$\lambda f(x) + \mu g(x), \quad f(x) \cdot g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)}, \quad (g(x) \neq 0),$$

también pertenecen a  $C^\infty(\Omega) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ .

2) La composición de dos funciones diferenciables

$$x \mapsto y = f(x) \mapsto z = g(y) = g(f(x)),$$

es también una función diferenciable. Ahora  $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  y  $g : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{C}$ .

Para los problemas de contorno suele utilizarse el espacio  $C^\infty(\overline{\Omega})$  de funciones diferenciables en el cierre  $\overline{\Omega}$  de  $\Omega$ . Por definición  $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$  si  $u \in C^\infty(\Omega_0)$  para algún abierto  $\Omega_0 \supset \overline{\Omega}$ .

## 1.3. Existencia local de soluciones de EDP

### 1.3.1. Planteamiento del problema

Dada una EDP (1.1) sobre un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , la primera cuestión natural a considerar es la existencia de soluciones  $u = u(x)$ . Por nuestra experiencia con las ecuaciones diferenciales ordinarias debemos intuir que los resultados generales que podemos esperar han de ser *locales*. Es decir, resultados asegurando la existencia de soluciones en *algún abierto alrededor de cada punto de  $\Omega$* .

existencia local

Un aspecto importante a considerar es el tipo de soluciones que buscamos. Es decir, las propiedades que exigimos a  $u = u(x)$ . Nuestra decisión en este aspecto está condicionada por las propiedades de la propia función  $F = F(x, D^\alpha u)$  que define la EDP. En este sentido vamos a concentrarnos ahora en una clase de problemas en que es posible deducir un importante resultado sobre la existencia de soluciones analíticas. En este punto es importante comentar la noción de función analítica.

### Funciones analíticas

El espacio  $A(\Omega)$  de **funciones analíticas** en un abierto  $\Omega$  está formado por las funciones  $f = f(x)$  tales que para todo punto  $a \in \Omega$  existe un radio  $r > 0$  y un desarrollo en serie múltiple de potencias de  $f$

funciones analíticas

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \geq 0} c_\alpha (x - a)^\alpha, \quad (x - a)^\alpha := (x_0 - a_0)^{\alpha_0} (x_1 - a_1)^{\alpha_1} \cdots (x_n - a_n)^{\alpha_{n-1}},$$

convergente en la bola  $|x - a| < r$ .

Las propiedades de las funciones analíticas que más nos interesan ahora son

- 1) Toda función analítica en  $\Omega$  es también una función diferenciable en  $\Omega$ . Además sus desarrollos en serie de potencias alrededor de cualquier  $a \in \Omega$  coinciden con sus desarrollos de Taylor. Es decir

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \geq 0} c_\alpha (x - a)^\alpha, \quad c_\alpha = \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(a).$$

- 2) Si  $f, g \in A(\Omega)$  entonces las funciones

$$\lambda f(x) + \mu g(x), \quad f(x) \cdot g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)}, \quad (g(x) \neq 0),$$

también pertenecen a  $A(\Omega) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ .

- 3) La composición de dos funciones analíticas

$$x \mapsto y = f(x) \mapsto z = g(y) = g(f(x)),$$

es también una función analítica. Aquí tenemos,  $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  y  $g : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{C}$ .

forma normal

Pasamos a introducir la noción de EDP en forma normal o de Kovalevskaya.

**DEFINICIÓN 1.3.1.** Sea una EDP (1.1) con variables independientes

$$x = (x_0 = t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} := (x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Decimos que la EDP posee forma normal (o de Kovalevskaya) de orden  $r > 0$  respecto de la variable  $t$  si puede escribirse como:

$$\frac{\partial^r u}{\partial t^r} = G(x, D^\alpha u), \quad r > 0, \quad (1.4)$$

siendo  $G$  una función que depende polinómicamente de un número finito de derivadas

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_0^{\alpha_0} \cdots \partial x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}},$$

pero debe ser independiente de las siguientes

$$\frac{\partial^r u}{\partial t^r}; \quad D^\alpha u, \quad \text{con } |\alpha| > r.$$

### Comentarios

1. De acuerdo con la definición anterior  $r$  es el orden de (1.4).
2. Para analizar si una EDP posee la forma normal respecto de una de sus variables independientes  $t$ , lo primero que hay que hacer es despejar la derivada respecto de  $t$  de orden más alto y después comprobar que en el segundo miembro no aparezcan derivadas de orden estrictamente superior.



### Ejemplos

1. La EDP

$$u_x - u_y = \log(xy),$$

posee la forma normal respecto de cualquiera de sus variables  $x$  ó  $y$ , pues puede escribirse como

$$u_x = u_y + \log(xy),$$

o bien

$$u_y = u_x - \log(xy),$$

y en ambos casos se verifica la condición de normalidad respectiva.<sup>4</sup>

2. La ecuación del calor en 1+1 dimensiones

$$u_t - u_{xx} = 0,$$

es claramente de forma normal respecto de la variable  $x$ , pero no lo es respecto de  $t$  ya que al despejar  $u_t$

$$u_t = u_{xx},$$

en el segundo miembro queda una derivada de orden mayor que el de  $u_t$ .

<sup>4</sup>Sin embargo la función  $\log(xy)$  sólo es analítica cuando  $xy > 0$ , luego la EDP es normal-analítica (ver §1.3.2) en  $x$  e  $y$  en los dominios  $\Omega_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{ con } x > 0, y > 0\}$  y  $\Omega_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{ con } x < 0, y < 0\}$ .

## 3. La ecuación de Korteweg-de Vries

$$u_{xxx} = -uu_x - u_t,$$

es claramente normal respecto de  $x$ .

4. Las ecuaciones de Poisson y de Laplace en 3 dimensiones son normales respecto de sus tres variables independientes  $x, y, z$ . La ecuación de ondas en 1+3 dimensiones es normal respecto de sus cuatro variables independientes  $t, x, y, z$ . Las ecuaciones de Schrödinger y del calor en 1+3 dimensiones no son normales respecto de  $t$  y si lo son respecto de  $x, y, z$ .

problema de Cauchy de valores iniciales

**DEFINICIÓN 1.3.2.** Dada una EDP normal de orden  $r$  respecto de una variable  $t$

$$\frac{\partial^r u}{\partial t^r} = G(x, D^\alpha u), \quad x \in \Omega, \quad (1.5)$$

definida sobre un dominio

$$\Omega = I \times \Lambda,$$

siendo  $I$  un intervalo abierto de  $\mathbb{R}$  y  $\Lambda$  un abierto de  $\mathbb{R}^{n-1}$ , un problema de Cauchy con valores iniciales consiste en determinar una solución  $u = u(x)$  de (1.5) que satisfaga las  $r$  condiciones iniciales

$$\begin{aligned} u(t_0, \mathbf{x}) &= \Phi_0(\mathbf{x}), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(t_0, \mathbf{x}) &= \Phi_1(\mathbf{x}), \\ &\vdots \\ \frac{\partial^{r-1} u}{\partial t^{r-1}}(t_0, \mathbf{x}) &= \Phi_{r-1}(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad \mathbf{x} \in \Lambda \quad (1.6)$$

donde  $t_0 \in I$  y  $\Phi_i = \Phi_i(\mathbf{x})$  son una serie de funciones dadas, que reciben el nombre de valores iniciales del problema.



**Ejemplo** Para la ecuación de Schrödinger no lineal, que tiene la siguiente forma normal con respecto a  $x$ ,

$$u_{xx} = -i u_t + u^3, \quad u : \Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

se plantea el problema de Cauchy de condiciones iniciales

$$\begin{aligned} u(t, 0) &= f(t), \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) &= g(t). \end{aligned}$$

### 1.3.2. El teorema de Cauchy-Kovalevskaya

Uno de los resultados generales de la teoría de EDP, que se aplica tanto a los casos lineales como no lineales, es el siguiente teorema debido a Cauchy y Kovalevskaya, al cual nos referiremos como teorema CK.

teorema de Cauchy-Kovalevskaya

**Teorema 1.3.3.** *Sea un problema normal de Cauchy con valores iniciales (1.5)-(1.6) para una EDP normal y  $x_0 = (t_0, \mathbf{x}_0) \in \Omega$  un punto de su dominio tal que*

**i) Condición de analiticidad de la EDP.**

*Como función de  $x$  la función  $G(x, D^\alpha u)$  del segundo miembro de (1.5) es analítica en  $x_0$ .*

**ii) Condición de analiticidad de los valores iniciales.**

*Los valores iniciales  $\Phi_i(\mathbf{x})$ ,  $(i = 0, \dots, r - 1)$  son funciones analíticas en  $\mathbf{x}_0$ .*

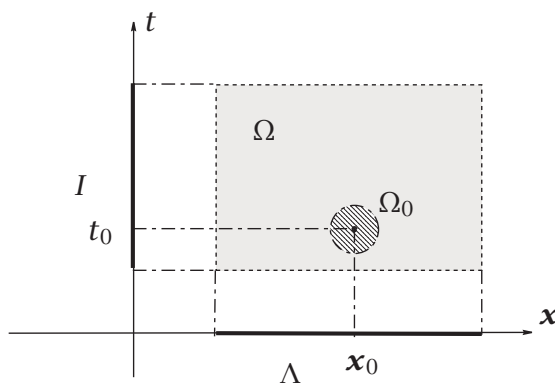
*Entonces existe una función  $u = u(x)$  definida sobre un abierto  $\Omega_0 \subset \Omega$  que contiene a  $x_0$  tal que:*

**i) La función  $u = u(x)$  satisface la EDP en  $\Omega_0$  y las condiciones iniciales en todo punto  $(t_0, \mathbf{x}) \in \Omega_0$ .**

**ii) La función  $u = u(x)$  es la única función analítica en  $\Omega_0$  que satisface tales propiedades.**

### Comentarios

1. El teorema nos garantiza la existencia y unicidad locales de una solución analítica de un problema de Cauchy con datos iniciales, siempre que se verifique que la EDP es normal y que tanto la EDP como los datos iniciales dependan analíticamente de las variables independientes.



2. Hay una clara analogía entre este resultado y los teoremas de existencia básicos de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO). Diremos que una EDP es *normal-analítica* si es normal y satisface la condición i) de analiticidad del teorema CK. Entonces, bajo condiciones apropiadas se verifica:

*La solución local de una EDO de orden  $r$  depende de  $r$  constantes arbitrarias.*

*La solución analítica local de una EDP normal-analítica de orden  $r$  depende de  $r$  funciones analíticas arbitrarias.*



3. La demostración del teorema, que no proporcionaremos en este curso, está basada en la generación de una solución en forma de serie múltiple de Taylor alrededor de  $x_0$

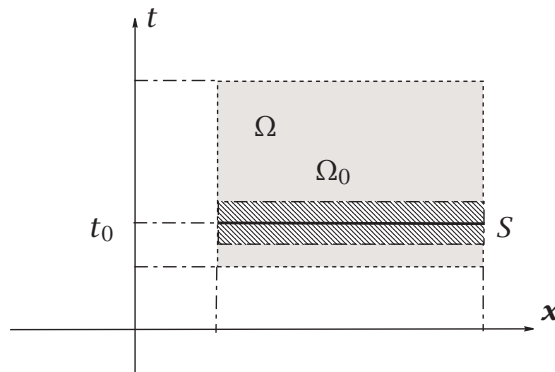
$$u(t, \mathbf{x}) = \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha u(x_0) (x - x_0)^\alpha.$$

Las incógnitas a determinar son las derivadas  $D^\alpha u(x_0)$ . Para ello observemos que derivando respecto de las variables  $x_i, i \geq 1$ , las condiciones iniciales (1.6), podemos hallar todas las derivadas del tipo

$$\frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial t^{\alpha_0} \partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}} (t_0, \mathbf{x}) = \frac{\partial^{|\alpha| - \alpha_0} \Phi_{\alpha_0}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}} (\mathbf{x}),$$

con  $\alpha_0 \leq r - 1$ . Para calcular las derivadas con  $\alpha_0 \geq r$  debemos utilizar las derivadas anteriores así como la propia EDP (1.5) y sus derivadas. Gracias a la forma normal de la EDP es posible de esta forma generar todas las derivadas  $D^\alpha u(x_0)$  de forma unívoca. Este proceso demuestra la unicidad de la solución analítica de (1.5)-(1.6). La demostración de la convergencia de la serie, es decir del hecho de que realmente construimos una función, es más delicada.

4. La condición  $t = t_0$  ( $t_0 \in I$ ) determina un trozo de hiperplano en  $S \subset \Omega$ . Si la función  $G(x, D^\alpha u)$  es analítica en  $S$  y los datos iniciales  $\Phi_i(\mathbf{x})$  son funciones analíticas en  $\Lambda$ , entonces el teorema asegura la existencia de una solución analítica local alrededor de cada punto de  $S$ . Como consecuencia puede demostrarse que existe una solución analítica única del problema de Cauchy en un abierto  $\Omega_0$  que contiene a  $S$ .



Para entender el alcance de este importante resultado es conveniente considerar los ejemplos siguientes.

### Ejemplos



1. Consideremos el problema siguiente

$$\begin{aligned} u_t &= u_x, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2, \\ u(0, x) &= e^x. \end{aligned}$$

Claramente la EDP es normal respecto de  $t$ , y se cumplen las condiciones de dependencia analítica en todo  $\mathbb{R}^2$ . Busquemos una solución local alrededor del punto  $(t, x) = (0, 0)$ :

$$u(t, x) = \sum_{n \geq 0, m \geq 0} \frac{1}{n!m!} \frac{\partial^{n+m} u}{\partial t^n \partial x^m}(0, 0) t^n x^m. \quad (1.7)$$

Derivando respecto de  $x$  la condición inicial tenemos que

$$\frac{\partial^m u}{\partial x^m}(0, 0) = \frac{\partial^m e^x}{\partial x^m} \Big|_{x=0} = e^0 = 1. \quad (1.8)$$

Por otra parte derivando respecto de  $t$  la EDP

$$\frac{\partial^{n+1} u}{\partial t^{n+1}} = \frac{\partial^{n+1} u}{\partial t^n \partial x}, \quad n \geq 0,$$

e iterando este resultado se obtiene

$$\frac{\partial^{n+1} u}{\partial t^{n+1}} = \frac{\partial^{n+1} u}{\partial t^{n-1} \partial x^2} = \cdots = \frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^{n+1}}.$$

Derivando esta última relación respecto de  $x$  se obtiene

$$\frac{\partial^{n+m+1} u}{\partial t^{n+1} \partial x^m} = \frac{\partial^{n+m+1} u}{\partial x^{n+m+1}}, \quad n, m \geq 0.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{n+m+1} u}{\partial t^{n+1} \partial x^m}(0, 0) &= \frac{\partial^{n+m+1} u}{\partial x^{n+m+1}}(0, 0) \\ \frac{\partial^{n+m+1} e^x}{\partial x^{n+m+1}} \Big|_{x=0} &= 1, \quad n, m \geq 0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

De esta forma usando (1.8)-(1.9) en (1.7) se obtiene

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \sum_{n \geq 0, m \geq 0} \frac{1}{n!m!} t^n x^m \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} t^n \sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!} x^m \\ &= e^t e^x. \end{aligned}$$

Puede comprobarse directamente que hemos construido una solución del problema.<sup>5</sup>

## 2. Ausencia de normalidad

Consideremos ahora el problema de Cauchy:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times (-1, 1), \\ u(0, x) &= \frac{1}{1-x}. \end{aligned}$$

<sup>5</sup>La solución general de la ecuación  $u_t = u_x$  tiene la forma  $f(t+x)$  donde  $f$  es cualquier función derivable. Si además queremos que  $u(0, x) = e^x$  debemos tener  $f(x) = e^x$  y así  $u(t, x) = e^{t+x}$  como hemos obtenido.

En este caso, aunque se cumplen las condiciones de analiticidad del teorema CK en todo el dominio, la EDP no es normal respecto de  $t$ . Luego no podemos asegurar que se verifiquen las conclusiones del teorema CK. De hecho vamos a comprobar que no se cumplen. Para ello vamos a suponer que existe una solución analítica local en  $(t, x) = (0, 0)$

$$u(t, x) = \sum_{n \geq 0, m \geq 0} \frac{1}{n!m!} \frac{\partial^{n+m} u}{\partial t^n \partial x^m}(0, 0) t^n x^m.$$

La serie ha de ser convergente para todo  $(t, x)$  en algún abierto del tipo  $(-r_0, r_0) \times (-r_1, r_1)$ . Para todo  $x_0$  tal que  $|x_0| < r_1$  la función  $u(t, x_0)$  será una función analítica de  $t$  alrededor de  $t = 0$ , luego admitirá un desarrollo en serie

$$u(t, x_0) = \sum_{n \geq 0} a_n(x_0) t^n, \quad (1.10)$$

donde

$$a_n(x_0) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n u}{\partial t^n}(0, x_0).$$

Pero derivando la EDP

$$\frac{\partial^n u}{\partial t^n} = \frac{\partial^{n+1} u}{\partial t^{n-1} \partial x^2}, \quad n \geq 0,$$

e iterando este resultado se obtiene

$$\frac{\partial^n u}{\partial t^n} = \frac{\partial^{n+4} u}{\partial t^{n-2} \partial x^4} = \dots = \frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2n}}.$$

Por otra parte derivando respecto de  $x$  la condición inicial tenemos que

$$\frac{\partial^m u}{\partial x^m}(0, x_0) = \frac{\partial^m (1-x)^{-1}}{\partial x^m} \Big|_{x=x_0} = \frac{m!}{(1-x_0)^{m+1}}.$$

Por tanto

$$a_n(x_0) = \frac{(2n)!}{n!(1-x_0)^{2n+1}}.$$

Pero este resultado implica que la serie (1.10) tiene radio de convergencia  $r = 0$  ya que aplicando la fórmula bien conocida:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(1-x_0)^2} = \infty. \end{aligned}$$

Luego no es posible encontrar una solución analítica alrededor de  $(0, 0)$ .

A pesar de que no existe una solución analítica local en  $(0, 0)$  de este problema de Cauchy, puede demostrarse que sí que existe una solución de clase  $C^\infty$ .

### 3. Ausencia de la condición i) de analiticidad de la EDP

Si la condición i) de analiticidad no se verifica podemos tener problemas muy graves con la existencia de soluciones locales. No es sólo que nos podamos encontrar con la ausencia de soluciones analíticas, sino que quizás la EDP *no tiene*

*soluciones locales admisibles*.<sup>6</sup> La construcción de tales ejemplos es sofisticada, sólo mencionaremos el debido a H. Lewy (1957) que es la siguiente EDP lineal de primer orden

$$u_x + i u_y - 2i(x + i y)u_t = f(t).$$

Resulta que si  $f = f(t)$  es una función continua con valores reales, que sólo depende de  $t$  y no es analítica en  $t = 0$ , entonces no existe ninguna solución local de clase  $C^1$  en  $(t, x, y) = (0, 0, 0)$ .

Este ejemplo muestra la profundidad del problema de existencia local de soluciones de EDP en el caso de no analiticidad.<sup>7</sup>

ejemplo de

## 1.4. Problemas de Cauchy. Hipersuperficies características

### 1.4.1. Planteamiento del problema

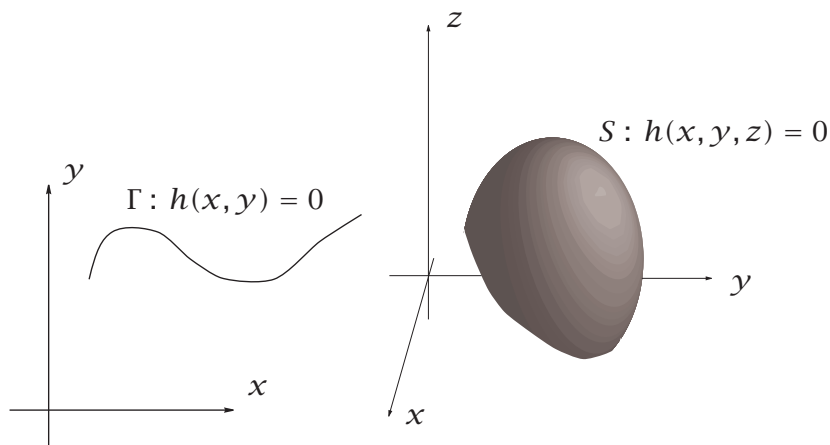
En la sección anterior hemos considerado la cuestión de la existencia de soluciones locales de una EDP. Ahora queremos considerar la misma cuestión pero para problemas de Cauchy de valores iniciales sobre un subconjunto  $S$  de  $\mathbb{R}^n$  determinado por una ecuación implícita:

$$h(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = 0. \quad (1.11)$$

Tales subconjuntos  $S$  se denominan hipersuperficies de  $\mathbb{R}^n$ . Podemos construir un campo de vectores unitarios normales sobre  $S$  mediante la expresión:

$$\mathbf{n}(x) := \frac{\nabla h(x)}{\|\nabla h(x)\|}.$$

En los casos  $n = 2$  (el plano) y  $n = 3$  (el espacio),  $S$  será una curva, que denotaremos  $\Gamma$ , y una superficie, respectivamente.



problema de Cauchy

<sup>6</sup>Por admisible entendemos aquellas soluciones cuyo grado de diferenciabilidad es mayor o igual que el orden de la EDP.

<sup>7</sup>Entre los resultados más generales que pueden usarse en tal contexto está la siguiente consecuencia de un importante resultado (**teorema de Nirenberg** (1959)): dada una EDP lineal de la forma:

$$\sum_{\alpha} c_{\alpha} D^{\alpha} u(x) = f(x),$$

donde los  $c_{\alpha}$  son constantes y  $f$  una función  $C^{\infty}$  en  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , entonces existe una solución local de clase  $C^{\infty}$  en  $x_0$ .

**DEFINICIÓN 1.4.1.** Sea una EDP de orden  $r$  sobre un dominio  $\Omega$  en  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\boxed{F(x, D^\alpha u) = 0, \quad x \in \Omega.} \quad (1.12)$$

Dada una hipersuperficie  $S$  (1.11) en  $\overline{\Omega}$ , un problema de Cauchy de valores iniciales sobre  $S$  es un sistema de ecuaciones determinado por (1.12) y  $r$  condiciones

$$\boxed{\begin{aligned} u|_S &= \Phi_0(x), \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_S &= \Phi_1(x), \\ &\vdots \\ \frac{\partial^{r-1} u}{\partial \mathbf{n}^{r-1}}|_S &= \Phi_{r-1}(x), \end{aligned}} \quad (1.13)$$

siendo los datos iniciales  $\Phi_i(x)$  funciones definidas sobre  $S$ . Diremos que  $S$  es una hipersuperficie característica de (1.12) si las condiciones iniciales (1.13) determinan el valor de la función  $F(x, D^\alpha u)$  sobre  $S$ .

El significado de las hipersuperficies características es que el problema de Cauchy de valores iniciales sobre ellas será en general incompatible. Esto es así debido a que de acuerdo con la definición dada el valor de  $F(x, D^\alpha u)$  sobre  $S$  está determinada por las condiciones iniciales y por tanto solo será posible la existencia de una solución de la EDP si ese valor es cero.



## Ejemplos

1. Sea el siguiente problema de Cauchy

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2, \\ u|_{t=0} &= \Phi_0(x), \quad u_t|_{t=0} = \Phi_1(x). \end{aligned}$$

Obsérvese que la EDP es de orden 2 y que las dos condiciones iniciales están asociadas a la curva  $\Gamma$  determinada por la ecuación  $t = 0$ . Sobre  $\Gamma$  la función  $F = u_t - u_{xx}$  está determinada por las condiciones iniciales, ya que:

$$(u_t - u_{xx})|_\Gamma = \Phi_1(x) - \Phi_{0,xx}(x).$$

Pero la EDP exige que  $F = 0$  sobre  $\Gamma$ . Por lo tanto, en general el problema de Cauchy es incompatible pues sólo podrá tener solución para ciertos datos iniciales: aquellos que satisfagan:

$$\Phi_1(x) - \Phi_{0,xx}(x) = 0.$$

2. Estudiemos el siguiente problema de Cauchy

$$\begin{aligned} A(\xi_1, \xi_2)u_{\xi_1} + B(\xi_1, \xi_2)u_{\xi_2} + G(\xi_1, \xi_2, u) &= 0, \\ u(0, \xi_2) &= \Phi(\xi_2). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Ahora las variables independientes son  $\xi_1, \xi_2$  y la curva  $\Gamma$  está determinada por  $\xi_1 = 0$ . Observemos que sobre  $\Gamma$  todas las derivadas parciales con respecto a

$\xi_2$  de las soluciones se encuentran completamente determinadas por  $\Phi$  y sus derivadas:

$$\frac{\partial^n u}{\partial \xi_2^n}(0, \xi_2) = \Phi^{(n)}(\xi_2).$$

Sin embargo, el cálculo de las derivadas con respecto a  $\xi_1$  de  $u$  sobre  $\Gamma$  no puede hacerse usando la condición inicial. Por tanto el primer miembro de la EDP no estará completamente determinado sobre  $\Gamma$ , salvo cuando suceda que  $A(0, \xi_2) = 0$ . En tal caso para que pueda existir solución del problema de Cauchy debe suceder

$$B(0, \xi_2)\Phi'(\xi_2) + G(0, \xi_2, \Phi) = 0$$

que claramente es una ligadura entre los coeficientes  $B, G$  que definen la EDP y la función  $\Phi$ . La curva  $\Gamma : \xi_1 = 0$  es un ejemplo de lo que se entiende por curva característica, concepto que será estudiado a continuación.

### 1.4.2. Curvas características para EDP de primer orden

Consideremos ahora el problema general de Cauchy para una EDP de primer orden en  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  de la forma:

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + G(x, y, u) = 0, \quad (1.15)$$

$$u|_{\Gamma} = \Phi(x, y), \quad (1.16)$$

donde las funciones  $a$  y  $b$  toman valores reales y  $\Gamma$  es una curva en  $\Omega$  de ecuación:

$$\Gamma : y = y(x).$$

Nuestro objetivo es determinar las curvas  $\Gamma$  que son características. Para ello efectuamos un cambio de variables  $(x, y) \mapsto (\xi_1, \xi_2)$

$$\xi_1 = \xi_1(x, y), \quad \xi_2 = \xi_2(x, y),$$

con el fin de llevar nuestro problema a la forma (1.14). Por tanto, debemos imponer la condición

$$\xi_1(x, y) = y - y(x).$$

Esta condición hace que la ecuación de la curva  $\Gamma$  en las nuevas variables sea

$$\Gamma : \xi_1 = 0.$$

En cuanto a la EDP, toma la forma

$$a\left(u_{\xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} + u_{\xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x}\right) + b\left(u_{\xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial y} + u_{\xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial y}\right) + G(\xi_1, \xi_2, u) = 0,$$

o bien

$$(a\xi_{1,x} + b\xi_{1,y})u_{\xi_1} + (a\xi_{2,x} + b\xi_{2,y})u_{\xi_2} + G(\xi_1, \xi_2, u) = 0. \quad (1.17)$$

La condición inicial se escribe

$$u(0, \xi_2) = \Phi(0, \xi_2), \quad (1.18)$$

donde ahora suponemos que todas las funciones  $a, b, u, G \dots$  están expresadas en términos de las variables  $(\xi_1, \xi_2)$ . Derivando (1.18) se obtiene

$$u_{\xi_2}(0, \xi_2) = \Phi_{\xi_2}(0, \xi_2).$$

Por tanto la función  $F$  de la EDP (1.17)

$$F = (a\xi_{1,x} + b\xi_{1,y})u_{\xi_1} + (a\xi_{2,x} + b\xi_{2,y})u_{\xi_2} + G(\xi_1, \xi_2, u),$$

está determinada por la condición inicial sobre  $\Gamma$  salvo por el término en  $u_{\xi_1}$ . Pero este término está ausente cuando:

$$(a\xi_{1,x} + b\xi_{1,y})|_{\Gamma} = 0, \quad (1.19)$$

luego esta condición es la que caracteriza las curvas características. Como la curva  $\Gamma$  satisface:

$$\xi_1(x, y(x)) = 0,$$

entonces derivando esta ecuación respecto de  $x$

$$\xi_{1,x}(x, y(x)) + \xi_{1,y}(x, y(x))y'(x) = (\xi_{1,x} + \xi_{1,y}y')|_{\Gamma} = 0.$$

Por tanto la condición (1.19) queda

$$((b - ay')\xi_{1,y})|_{\Gamma} = 0.$$

Así obtenemos la siguiente ecuación diferencial ordinaria que determina las curvas características:

$$\boxed{y'(x) = \frac{b(x, y)}{a(x, y)}} \quad (1.20)$$

EDO curvas características



## Ejemplos

1. Sea la EDP

$$u_x + u_y + xyu^2 = 0.$$

En este caso:

$$a = 1, \quad b = 1,$$

la ecuación (1.20) de las características es

$$y'(x) = 1.$$

Luego las características son las rectas

$$y = x + c.$$

2. Para la EDP

$$xu_x + yu_y + u = 0,$$

se tiene que

$$a = x, \quad b = y,$$

luego la ecuación (1.20) de las características es

$$y'(x) = \frac{y}{x},$$

cuya integración conduce a las siguientes curvas características

$$y = cx.$$

3. La EDP

$$\sin y \, u_x + \cos x \, u_y + u^3 = 0,$$

tiene

$$a = \sin y, \quad b = \cos x,$$

la ecuación (1.20) de las características es

$$y'(x) = \frac{\cos x}{\sin y}.$$

Luego las características son las curvas

$$y = \arccos(-\sin x + c).$$

### 1.4.3. Curvas características para EDP de segundo orden

Consideremos ahora el problema de Cauchy para EDP de segundo orden en  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  de la forma:

$$a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + G(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \quad (1.21)$$

$$u|_{\Gamma} = \Phi_0(x, y), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\Gamma} = \Phi_1(x, y),$$

donde las funciones  $a$ ,  $b$  y  $c$  toman valores reales y  $\Gamma$  es una curva en  $\Omega$  de ecuación:

$$\Gamma: \quad y = y(x).$$

Nuestro objetivo de nuevo es determinar las curvas  $\Gamma$  que son características. Para ello efectuamos también un cambio de variables  $(x, y) \mapsto (\xi_1, \xi_2)$

$$\xi_1 = \xi_1(x, y), \quad \xi_2 = \xi_2(x, y),$$

con la condición

$$\xi_1(x, y) = y - y(x),$$

que hace que la ecuación de la curva  $\Gamma$  en las nuevas variables sea

$$\Gamma: \quad \xi_1 = 0. \quad (1.22)$$

Veamos qué derivadas podemos determinar a partir de las condiciones iniciales. La primera de estas condiciones adopta la forma

$$u(0, \xi_2) = \Phi_0(0, \xi_2),$$

y mediante derivación es claro que se obtienen todas las derivadas respecto de  $\xi_2$  en  $\Gamma$ :

$$u_{\xi_2}(0, \xi_2) = \Phi_{0, \xi_2}(0, \xi_2), \quad u_{\xi_2 \xi_2}(0, \xi_2) = \Phi_{0, \xi_2 \xi_2}(0, \xi_2), \dots$$

En cuanto a la segunda condición inicial, tenemos en primer lugar que como consecuencia de (1.22) el campo de vectores normales es

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{\xi_{1,x}^2 + \xi_{1,y}^2}}(\xi_{1,x}, \xi_{1,y}),$$



y la derivada correspondiente es

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{\xi_{1,x}^2 + \xi_{1,y}^2}} (\xi_{1,x} u_x + \xi_{1,y} u_y).$$

Dado que mediante la regla de la cadena podemos expresar las derivadas  $u_x$  y  $u_y$  en términos de  $u_{\xi_1}$  y  $u_{\xi_2}$ , disponemos de una expresión de la forma

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\Gamma} = \lambda(\xi_2) u_{\xi_1}(0, \xi_2) + \mu(\xi_2) u_{\xi_2}(0, \xi_2),$$

en que conocemos las funciones  $\lambda$  y  $\mu$ . Así la segunda condición inicial se escribe

$$\lambda(\xi_2) u_{\xi_1}(0, \xi_2) + \mu(\xi_2) u_{\xi_2}(0, \xi_2) = \Phi_1(0, \xi_2), \quad (1.23)$$

que es de la forma

$$u_{\xi_1}(0, \xi_2) = \tilde{\Phi}_1(\xi_2).$$

Por derivación se obtiene

$$u_{\xi_1 \xi_2}(0, \xi_2) = \tilde{\Phi}_{1, \xi_2}(\xi_2).$$

En conclusión, las condiciones iniciales nos permiten determinar sobre  $\Gamma$  la función  $u$  y todas sus derivadas respecto de  $\xi_i$  hasta el segundo orden con la excepción de  $u_{\xi_1 \xi_1}(0, \xi_2)$ .

Al escribir la EDP (1.21) sobre  $\Gamma$  en las variables  $\xi_i$ , el único término que no vendrá determinado por las condiciones iniciales será el de  $u_{\xi_1 \xi_1}(0, \xi_2)$ . Para hallar su coeficiente, vemos que

$$\begin{aligned} u_{xx} &= (\xi_{1,x} \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \xi_{2,x} \frac{\partial}{\partial \xi_2}) (\xi_{1,x} \frac{\partial u}{\partial \xi_1} + \xi_{2,x} \frac{\partial u}{\partial \xi_2}) = \xi_{1,x}^2 u_{\xi_1 \xi_1} + \dots, \\ u_{yy} &= (\xi_{1,y} \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \xi_{2,y} \frac{\partial}{\partial \xi_2}) (\xi_{1,y} \frac{\partial u}{\partial \xi_1} + \xi_{2,y} \frac{\partial u}{\partial \xi_2}) = \xi_{1,y}^2 u_{\xi_1 \xi_1} + \dots, \\ u_{xy} &= (\xi_{1,x} \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \xi_{2,x} \frac{\partial}{\partial \xi_2}) (\xi_{1,y} \frac{\partial u}{\partial \xi_1} + \xi_{2,y} \frac{\partial u}{\partial \xi_2}) = \xi_{1,x} \xi_{1,y} u_{\xi_1 \xi_1} + \dots. \end{aligned}$$

De donde se deduce que el término que contiene  $u_{\xi_1 \xi_1}(0, \xi_2)$  en (1.21) es

$$(a \xi_{1,x}^2 + 2b \xi_{1,x} \xi_{1,y} + c \xi_{1,y}^2) u_{\xi_1 \xi_1}.$$

Por consiguiente las características son determinadas por la condición

$$(a \xi_{1,x}^2 + 2b \xi_{1,x} \xi_{1,y} + c \xi_{1,y}^2) \Big|_{\Gamma} = 0.$$

De manera equivalente cuando  $a \neq 0$

$$\xi_{1,x}(x, y(x)) + \frac{1}{a} (b \pm \sqrt{b^2 - ac}) \xi_{1,y}(x, y(x)) = 0. \quad (1.24)$$

Como  $\xi_1(x, y(x)) = 0$ , derivando respecto de  $x$  se obtiene

$$\xi_{1,x}(x, y(x)) + \xi_{1,y}(x, y(x)) y'(x) = 0,$$

que al usarlo en (1.24) nos proporciona el siguiente par de ecuaciones diferenciales

EDO curvas características

clasificación EDP 2<sup>do</sup> orden

ordinarias para las características

$$y' = \frac{1}{a}(b \pm \sqrt{b^2 - ac}). \quad (1.25)$$

Cada una de estas ecuaciones puede determinar una familia de características.

Además nos permite establecer la siguiente clasificación de las EDP de segundo orden (1.21) en subconjuntos  $\Omega_0 \subseteq \Omega$  en que no cambie el signo de la función  $b^2 - ac$ .

**DEFINICIÓN 1.4.2.** 1. *Elíptica en  $\Omega_0$  si*

$$b^2 - ac < 0, \quad \forall (x, y) \in \Omega_0.$$

*No poseen curvas características en  $\Omega_0$ , dado que (1.25) no tienen sentido.*

2. *Hiperbólica en  $\Omega_0$  si*

$$b^2 - ac > 0, \quad \forall (x, y) \in \Omega_0.$$

*Poseen dos familias de curvas características en  $\Omega_0$  determinadas por (1.25).*

3. *Parabólica en  $\Omega_0$  si*

$$b^2 - ac = 0, \quad \forall (x, y) \in \Omega_0.$$

*Poseen una sola familia de curvas características en  $\Omega$  dada por las soluciones de  $y' = \frac{b}{a}$ .*



## Ejemplos

1. La ecuación de Laplace

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

verifica

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = 1,$$

luego  $b^2 - ac = -1 < 0$ . Es elíptica en todo el plano. No tiene características.

2. La ecuación de ondas

$$u_{tt} - u_{xx} = 0,$$

verifica

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = -1,$$

luego  $b^2 - ac = 1 > 0$ . Es hiperbólica en todo el plano. Sus características vienen descritas por las ecuaciones

$$x'(t) = \pm 1,$$

son por tanto las dos familias de rectas

$$x = \pm t + k.$$

## 3. La ecuación del calor

$$u_t - u_{xx} = 0,$$

verifica

$$a = -1, \quad b = 0, \quad c = 0,$$

luego  $b - ac = 0$ . Es parabólica en todo el plano. Sus características verifican

$$t'(x) = 0.$$

Luego son la familia de rectas  $t = k$ .

## 4. Para la ecuación de Tricomi

$$y u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

se tiene

$$a(x, y) = y, \quad b = 0, \quad c = 1.$$

Así,

$$b^2 - ac = -y.$$

Por tanto, la ecuación es

$$\begin{cases} \text{elíptica en} & y > 0, \\ \text{parabólica en} & y = 0, \\ \text{hiperbólica en} & y < 0. \end{cases}$$

En el caso hiperbólico,  $y < 0$ , la ecuación diferencial de las características es

$$y' = \pm \sqrt{-\frac{1}{y}}$$

luego las curvas características son

$$y(x) = -\left(\mp \frac{3}{2}x + c\right)^{2/3}$$

con  $c \in \mathbb{R}$  una constante arbitraria.<sup>8</sup>

La ecuación de Tricomi aparece en la descripción del movimiento de un cuerpo en un gas, siendo su velocidad aproximadamente la del sonido. El caso elíptico ( $y > 0$ ) corresponde a movimiento subsónico y el hiperbólico ( $y < 0$ ) a movimiento supersónico.

---

<sup>8</sup>Observemos que  $y = 0$  no es curva característica. Qué la ecuación sea parabólica para  $y = 0$  significa que en esos puntos tan sólo existe una dirección característica, en este caso de pendiente infinita  $y' = \pm\infty$ .

## 1.5. Solución general. Método de la solución completa

En el estudio de ecuaciones diferenciales ordinarias se ha visto que cuando se pretende resolver la ecuación

$$F(x, u, Du, \dots, D^N u) = 0$$

se ha de esperar una solución general que depende de  $N$  constantes de integración

$$u = u(x, c_1, \dots, c_N).$$

Las  $N$  constantes de integración son arbitrarias están directamente relacionadas con las condiciones iniciales.

Por ejemplo, la ecuación diferencial

$$D^2 u - u = 0$$

tiene como solución general

$$u = c_1 \exp(x) + c_2 \exp(-x).$$

En el contexto de este curso, el de las EDP, ocurre un fenómeno análogo. Dada una EDP

$$F(x, D^\alpha u) = 0, x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

de orden  $N$  se entiende por solución general una solución que depende de  $N$  funciones arbitrarias de  $(n - 1)$  variables —estas variables son funciones de las variables independientes  $x_0, \dots, x_{n-1}$ .

Ya hemos visto que la solución general de la ecuación de ondas

$$u_{tt} - u_{xx} = 0$$

es

$$u(t, x) = f(t + x) + g(t - x).$$

El orden  $N = 2$ , y aparecen dos funciones arbitrarias de 1 variable  $n = 2$ , observemos que estas variables son funciones de  $x$  y  $t$ .

Como en el caso de las EDO la solución general de una EDP puede no contener a todas las soluciones. Por ejemplo, si una EDP se factoriza

$$F(x, D^\alpha u) = F_1(x, D^\alpha u)F_2(x, D^\alpha u) = 0$$

donde tanto  $F_1$  como  $F_2$  son de orden  $N$ , la solución general de  $F_1(x, D^\alpha u) = 0$  es solución general de  $F(x, D^\alpha u) = 0$ . Sin embargo, en esta solución general no encontramos las soluciones de  $F_2(x, D^\alpha u) = 0$  que son también soluciones de  $F(x, D^\alpha u) = 0$ .

### 1.5.1. Método de la solución completa para ecuaciones de primer orden

En esta sección vamos a estudiar un método para encontrar soluciones generales (o completas) de ecuaciones de primer orden de la forma

$$F\left(x_0, \dots, x_{n-1}, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_1}\right) = 0.$$

En la Física estas ecuaciones suelen darse en diversas circunstancias. Por ejemplo, en los estudios de Mecánica nos encontramos con la ecuación de Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_{n-1}}\right) = 0$$

y en la Óptica Geométrica encontramos la ecuación de la eikonal:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial S}{\partial x_{n-1}}\right)^2 = 1$$

Vamos a tratar la solución envolvente de una familia multi-paramétrica de soluciones. Para ello introducimos

**DEFINICIÓN 1.5.1.** Dado un  $a = (a_0, \dots, a_{m-1})$  decimos que  $u(x, a)$  es una solución multi-paramétrica de la EDP

$$F(x, D^\alpha u) = 0$$

si es solución para todo valor de  $a$ .

Existe un aspecto técnico sobre estas familias multi-paramétricas: ¿Dependen realmente de  $m$  parámetros? Esto es, es posible introducir  $a_i = a_i(b_0, \dots, b_{m-2})$ , de tal modo que la solución tan sólo dependerá de  $m - 1$  parámetros. Esta cuestión se resuelve solicitando que la matriz

$$\begin{pmatrix} u_{a_0} & u_{x_0 a_0} & \dots & u_{x_{n-1} a_0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{a_{m-1}} & u_{x_0 a_{m-1}} & \dots & u_{x_{n-1} a_{m-1}} \end{pmatrix}$$

tenga rango  $m$ . De este modo tenemos asegurado que la solución depende realmente de  $m$  parámetros. Cuando tenemos una solución que realmente depende de  $n$  parámetros decimos que es una **integral completa**.

## Ejemplos

1. **Ecuación de Clairut:** Esta es una EDP relevante en geometría diferencial:

$$x \cdot \nabla u + f(\nabla u) = u$$

donde  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Dado  $a \in \mathbb{R}^n$  tenemos la integral completa siguiente

$$u(x, a) = a \cdot x + f(a).$$

2. **Ecuación de la eikonal:** En óptica geométrica aparece la siguiente ecuación

$$|\nabla u| = 1$$

y, dado  $a \in \mathbb{R}^n$  y  $b \in \mathbb{R}$ , una integral completa es

$$u(x, a, b) = a \cdot x + b, \text{ siempre que } |a| = 1.$$

3. **Ecuación de Hamilton-Jacobi** En la mecánica encontramos la ecuación (aquí la acción  $S$  la denotamos por  $u$ )

$$u_t + H(\nabla u) = 0, \quad \nabla u = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$$

donde el hamiltoniano  $H$  sólo depende del momento. Una solución completa es

$$u(x, t, a, b) = a \cdot x - H(a)t + b, \quad a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}.$$

Dada una familia multi-paramétrica de soluciones  $u(x, a)$  de una EDP de primer orden podemos construir una solución a partir de ella, en principio no incluida en la familia, tal como se describe a continuación

**PROPOSICIÓN 1.5.2.** Si  $u(x, a)$  es una solución multi-paramétrica de la EDP

$$F\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_0}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_{n-1}}\right) = 0$$

y  $a(x)$  es la función determinada por las condiciones

$$\frac{\partial u(x, a)}{\partial a_i} = 0, \quad i = 0, \dots, m-1,$$

entonces

$$\tilde{u}(x) := u(x, a(x))$$

es una nueva solución de la EDP que denominamos solución envolvente.

Este resultado se sigue del siguiente cálculo

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial u}{\partial x_i}(x, a(x)) + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\partial u}{\partial a_j}(x, a(x)) \frac{\partial a_j}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial u}{\partial x_i}(x, a(x)),$$

ya que entonces

$$F\left(x, \tilde{u}, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_0}, \dots, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_{n-1}}\right) = F\left(x, u(x, a(x)), \frac{\partial u}{\partial x_0}(x, a(x)), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_{n-1}}(x, a(x))\right) = 0$$

La solución envolvente de construida a partir de una solución multi-paramétrica de una EDP de primer orden permite en algunos casos hallar la solución general:

**Teorema 1.5.3.** Sea  $u(x, a)$  una integral completa de una EDP de primer orden

$$F\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_0}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_{n-1}}\right) = 0.$$

La solución general (o completa) de la EDP se obtiene sustituyendo  $a_0 = f(a_1, \dots, a_{n-1})$  y hallando la solución envolvente  $\tilde{u}(x)$  de  $u(x, f(a_1, \dots, a_{n-1}), a_1, \dots, a_{n-1})$ .

Una solución general para una EDP de primer orden dependerá de una función de  $(n-1)$  variables. Pero la solución envolvente construida depende de justamente de una función arbitraria de  $(n-1)$  funciones:  $a_1(x), \dots, a_{n-1}(x)$ . Por tanto, el teorema es cierto.

**Ejemplos**

1. Por ejemplo, podemos considerar la EDP

$$u_x = u_y^m$$

una solución a un parámetro es

$$u(x, y, a) = a^m x - ay + f(a)$$

cuya envolvente viene dada por

$$\tilde{u}(x, y) = u(x, y, a(x, y)), \quad \text{donde } a(x, y) \text{ satisface } ma^{m-1}x + y + f'(a) = 0.$$

2. La ecuación eikonal en el plano:

$$u_x^2 + u_y^2 = 1$$

tiene como solución completa

$$u(x, y, a, b) = x \cos a + y \sin a + b,$$

y pongamos  $b = h(a)$ . La solución general viene dada por

$$x \cos a(x, y) + y \sin a(x, y) + h(a(x, y)),$$

donde  $a(x, y)$  resuelve

$$-x \sin a + y \cos a + h'(a) = 0.$$

Si imponemos que  $h = 0$ , obtenemos

$$\tan a(x, y) = \frac{y}{x}$$

y por ello  $a$  es el ángulo polar. Luego la solución es  $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$ .

3. Consideremos la ecuación de Hamilton-Jacobi para una partícula libre:

$$H(p) = \frac{p^2}{2m} : \quad u_t + \frac{|\nabla u|^2}{2m} = 0,$$

una solución completa es

$$a \cdot x - \frac{a^2}{2m}t + b, \quad a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}.$$

La solución general se obtiene a partir de

$$a(x, t) \cdot x - \frac{a(x, t)^2}{2m}t + h(a(x, t))$$

donde  $a(x, t)$  es solución de

$$x_i - \frac{1}{m}a_i t + h_{a_i}(a) = 0.$$

Si hacemos  $h = 0$  obtenemos

$$a = m \frac{x}{t}$$

y por ello, una solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi es

$$m \frac{|x|^2}{2t}.$$

### 1.5.2. El método de la hodógrafa

Vamos a presentar un método que permite construir soluciones para la siguiente EDP

$$u_t = f(u)u_x, \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Si  $u = u(t, x)$  es solución podemos considerar localmente, siempre que  $u_x \neq 0$  la función implícita  $x = x(t, u)$ . Esta función cumple  $u = u(t, x(t, u))$  y por ello

$$1 = u_x x_u, \quad 0 = u_t + u_x x_t.$$

Esto es

$$x_t = -\frac{u_t}{u_x} = -f(u)$$

cuya solución es

$$x = -f(u)t + g(u).$$

Esta última ecuación es conocida como ecuación de la hodógrafa. Supongamos que localmente hemos hallado una solución  $u(x, t)$  de la hodógrafa, entonces

$$x + f(u(x, t))t = g(u(x, t))$$

y por tanto

$$1 + f'(u)tu_x = g'(u)u_x, \quad f'(u)tu_t + f(u) = g'(u)u_t.$$

Así,

$$f'(u)t - g'(u) = \frac{1}{u_x}, \quad f'(u)t - g'(u) = \frac{f(u)}{u_t}$$

y tenemos que

$$u_t = f(u)u_x.$$

Observar que la EDP es de primer orden con dos variables independientes, así la solución general dependerá de una función arbitraria de una variable. La solución de la hodógrafa depende de una función arbitraria  $g$  de una variable, por ello es solución general. Por tanto, cualquier solución conduce a una hodógrafa y la hodógrafa lleva a una solución general.

## 1.6. Operadores diferenciales. Problemas lineales

En esta sección se formulan los problemas de contorno y/o de condiciones iniciales de tipo lineal, que son el tema de estudio de este curso. Se proporcionan las notaciones apropiadas para tratar con comodidad tales problemas.



### 1.6.1. Operadores diferenciales

**DEFINICIÓN 1.6.1.** Sea  $C^\infty(\overline{\Omega})$  el espacio de funciones diferenciables en  $\overline{\Omega}$ . Un operador diferencial  $L$  sobre  $C^\infty(\overline{\Omega})$  es una aplicación

$$\boxed{\begin{array}{ccc} L : C^\infty(\overline{\Omega}) & \mapsto & C^\infty(\overline{\Omega}) \\ u & \mapsto & Lu, \end{array}}$$

de la forma siguiente

$$Lu := \sum_{\alpha}' a_{\alpha}(x) D^{\alpha} u,$$

donde  $\sum_{\alpha}'$  significa que la suma se extiende a un conjunto finito de multi-índices  $\alpha$  con  $|\alpha| \geq 0$  y se supone que los coeficientes  $a_{\alpha}(x)$  son funciones de  $C^\infty(\overline{\Omega})$  dadas.

Todo operador diferencial es una aplicación lineal. Es decir, verifica

$$L(\lambda u + \mu v) = \lambda Lu + \mu Lv, \quad \forall u, v \in C^\infty(\overline{\Omega}), \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

Una notación habitual que usaremos para referirnos a un operador diferencial es

$$L := \sum_{\alpha}' a_{\alpha}(x) D^{\alpha}.$$



#### Ejemplos

1. Sea el siguiente operador en  $C^\infty(\mathbb{R})$

$$L = x^2 D + x.$$

Su acción sobre la función  $u = \cos x$  es

$$Lu = -x^2 \sin x + x \cos x.$$

2. El operador laplaciano

$$Lu := u_{xx} + u_{yy} + u_{zz},$$

puede denotarse como

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Es un operador diferencial sobre  $C^\infty(\overline{\Omega})$ , siendo  $\Omega$  un dominio cualquiera de  $\mathbb{R}^3$ . Su acción sobre la función

$$u := \exp(x^2 + y^2 + z^2),$$

es

$$Lu = (4(x^2 + y^2 + z^2) + 6) \exp(x^2 + y^2 + z^2).$$

Los operadores diferenciales son los objetos matemáticos apropiados para manejar las EDP lineales. Así, una EDP lineal de la forma

$$\sum_{\alpha} a_{\alpha}(x) D^{\alpha} u = f(x),$$

se escribe de forma condensada como

$$Lu = f,$$

siendo  $L$  el operador diferencial

$$Lu := \sum_{\alpha} a_{\alpha}(x) D^{\alpha} u.$$

Por tanto el problema que representa la EDP lineal consiste en encontrar elementos  $u \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$  cuya imagen mediante la aplicación lineal  $L$  coincida con la función  $f$ .

Ejemplos de estas EDP son

1. Ecuación de Poisson en 3 dimensiones:

$$Lu = f, \quad Lu := \Delta u.$$

2. Ecuación de ondas en 1+3 dimensiones:

$$Lu = 0, \quad Lu := u_{tt} - c^2 \Delta u.$$

3. Ecuación de Schrödinger en 1+3 dimensiones:

$$Lu = 0, \quad Lu := i \hbar u_t + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta u + qu.$$

4. La ecuación del calor en 1+3 dimensiones:

$$Lu = 0, \quad Lu := u_t - a^2 \Delta u.$$

Los operadores diferenciales tienen propiedades algebraicas muy importantes. Admiten las siguientes operaciones naturales

- 1) Suma de operadores  $L + M$

$$(L + M)u := Lu + Mu.$$

- 2) Producto de números complejos por operadores  $\lambda L$

$$(\lambda L)u := \lambda(Lu).$$

- 3) Producto de operadores  $LM$

$$(LM)u := L(Mu).$$

- 4) Conmutador de operadores  $[L, M]$

$$[L, M]u := L(Mu) - M(Lu).$$

Con respecto a la suma y al producto de números complejos los operadores diferenciales forman un espacio lineal. El operador cero, definido como el operador diferencial con todos los coeficientes iguales a cero, se denota  $L = 0$  (obviamente en tal caso  $Lu = 0$  para toda  $u$ ). Con respecto a la operación de producto de operadores, que coincide con la composición de operadores como aplicaciones, la peculiaridad más destacada es que no es una operación conmutativa. Por ejemplo, si tomamos

$$L = D, \quad M = D + x,$$

se tiene que

$$L(Mu) = D^2u + xDu + u, \quad M(Lu) = D^2u + xDu.$$

Por tanto  $LM \neq ML$ .

Es claro que dos operadores conmutan si y sólo si su conmutador es el operador cero  $[L, M] = 0$ .

### 1.6.2. Operadores de frontera y de condiciones iniciales

**DEFINICIÓN 1.6.2.** Sea  $C^\infty(\overline{\Omega})$  el espacio de funciones diferenciables en  $\overline{\Omega}$ . Un operador de frontera  $l$  sobre  $C^\infty(\overline{\Omega})$  es una aplicación

$$\boxed{\begin{array}{ccc} l : C^\infty(\overline{\Omega}) & \longrightarrow & C(S), \\ u & \mapsto & l(u), \end{array}}$$

siendo  $C(S)$  el conjunto de funciones continuas sobre una hipersuperficie  $S \subset S(\Omega)$  en la frontera de  $\Omega$ , de la forma siguiente

$$l(u) := \sum'_{\alpha} b_{\alpha}(x) D^{\alpha} u|_S,$$

donde  $\sum'_{\alpha}$  significa que la suma se extiende a un conjunto finito de multi-índices  $\alpha$  con  $|\alpha| \geq 0$  y se supone que los coeficientes  $b_{\alpha}(x)$  son funciones de  $C(S)$  dadas.

Todo operador de frontera es una aplicación lineal. Es decir, verifica

$$l(\lambda u + \mu v) = \lambda l(u) + \mu l(v), \quad \forall u, v \in C^\infty(\overline{\Omega}), \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

**DEFINICIÓN 1.6.3.** Cuando una de las variables independientes es el tiempo

$$\mathbf{x} = (t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} := (x_1, \dots, x_{n-1}),$$

y  $S$  denota el subconjunto intersección de un hiperplano  $t = t_0$  con  $\overline{\Omega}$  definimos un operador de condición inicial como una aplicación de la forma

$$\boxed{\begin{array}{ccc} l : C^\infty(\overline{\Omega}) & \longrightarrow & C(S), \\ u & \mapsto & l(u), \end{array}}$$

dada por

$$l(u) := \frac{\partial^r u}{\partial t^r} \Big|_{t=t_0}.$$

Es claro que estas aplicaciones son también lineales.

Los operadores de frontera y de condiciones iniciales son los objetos matemáticos apropiados para manejar las condiciones de contorno lineales y las condiciones iniciales. Así, una condición de contorno lineal de la forma

$$\sum'_{\alpha} b_{\alpha}(x) D^{\alpha} u|_S = g,$$

se escribe de forma condensada como

$$l(u) = g,$$

siendo  $l$  el operador de frontera

$$l(u) := \sum'_{\alpha} b_{\alpha}(x) D^{\alpha} u|_S,$$

Ejemplos típicos de operadores de frontera asociados con condiciones de contorno  $l(u) = g$  son

1. **Condición de Dirichlet:**

$$l(u) := u|_S.$$

2. **Condición de Neumann:**

$$l(u) := \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_S.$$

3. **Condición mixta**

$$l(u) := \left( au + b \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) \Big|_S.$$

### 1.6.3. Problemas lineales

El problema típico que consideraremos en este curso es el de caracterizar las funciones  $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$  que son solución de un sistema de ecuaciones de la forma

$$\begin{cases} Lu = f, \\ l_i(u) = g_i, \quad i = 1, \dots, m, \end{cases}$$

donde  $L$  es un operador diferencial y  $l_i$  una serie de operadores de frontera o de condiciones iniciales.

### 1.6.4. Características

El símbolo o parte principal del operador diferencial

$$L := \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha,$$

se define como

$$\sigma(x, \xi) := \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) \xi^\alpha.$$

Una característica de  $L$  es una hipersuperficie  $S$  de ecuación  $\phi(x) = 0$  tal que

$$\sigma(x, \nabla \phi) = 0.$$

Construimos, de forma análoga a la anterior discusión sobre características, nuevas coordenadas  $x'$  con  $x'_j = x_j$ ,  $j = 2, \dots, n$  y  $x'_1 = \phi(x)$ . Entonces la ecuación

$$Lu = f$$

se transforma en

$$\sigma(x, \nabla \phi(x)) \frac{\partial^m u}{\partial x'^m_1} + Mu = f$$

donde  $M$  es un operador diferencial en las variables  $x'$  que no contiene derivadas con respecto a  $x'_1$  de orden superior a  $(m - 1)$ . Por tanto, los problemas de Cauchy de condiciones iniciales sobre las características llevan aparejados ligaduras adicionales entre los datos que definen el problema.

Una ecuación es elíptica en un punto  $x_0$  si por el no pasa ninguna característica; v. g., no existen soluciones reales  $p = (p_i)$  a

$$\sigma(x_0, p) = 0.$$

## 1.7. Cuestiones, problemas y ejercicios

### 1.7.1. Cuestiones

1. Señalar cual de las siguientes ecuaciones en derivadas parciales está en forma normal con respecto de  $t$

- a)  $u_t + u_t u_x = 0$
- b)  $u_t + u u_{xx} + u^2_{xxx} = 0$
- c)  $u_{tt} + u_{tx} + u_{xx} u^2_t = 0$
- d)  $u_{tt} + u_{xxx} = 0$
- e)  $u_t + \exp(u_x) = 0$

**Resolución** La respuesta correcta es la 3. Que falla en el resto: en la primera la  $u_t$  no está despejada, en la segunda el orden es 3 y en  $t$  el orden de derivación es 1, algo parecido para la cuarta, por último en la 5 la dependencia en las derivadas no es polinómica.

2. Determinar para cual de los siguientes problemas de valores iniciales el teorema de Cauchy-Kowalevskaya asegura la existencia de solución local analítica alrededor del punto  $(t, x) = (0, 0)$

- a)  $u_t = \log(1+x)u_x, \quad u|_{t=0} = 1/\cos x$
- b)  $u_t = u_{xx}, \quad u|_{t=0} = x$
- c)  $u_t = \log(x-1)u_x, \quad u|_{t=0} = 1$
- d)  $u_{tt} = u_{xx}, \quad u|_{t=0} = x, \quad u_t|_{t=0} = \log(x-1)$
- e)  $u_t = u_x, \quad u|_{t=0} = \sqrt{x}$

**Resolución** Veamos cuales no pueden ser: en la segunda no tenemos forma normal con respecto de  $t$ , en la tercera, en la cuarta y en la quinta los coeficientes de la EDP no son analíticos en  $x = 0$ . Sin embargo en la primera la EDP está en forma normal, y los coeficientes tanto de la EDP como los que aparecen en las condiciones iniciales son analíticos; por ello, esta es la respuesta correcta.

3. Dada la ecuación en derivadas parciales

$$yu_{xx} + 2xu_{xy} + u_y^2 = 0$$

determinar cual de las curvas siguientes es característica

- a)  $y^2 = 2x^2$
- b)  $y^2 = 4x^2$
- c)  $y = 2x$
- d)  $y = x^2$
- e)  $y = -2x$

**Resolución** En esta EDP de segundo orden se tiene  $a(x, y) = y$ ,  $b(x, y) = x$ ,  $c(x, y) = 0$ . Por tanto, la EDO que determina las características es  $y' = (x \pm \sqrt{x^2})/y$ ; esto es, bien  $y' = 0$  o  $yy' = 2x$ . Así, integrando estas ecuaciones obtenemos dos familias de características  $y = \text{constante}$ ,  $y^2/2 = x^2 + \text{constante}$ .

4. Dada la ecuación en derivadas parciales

$$x^2u_{xx} - xyu_{xy} + y^2u_{yy} = \exp u$$

cual de las siguientes afirmaciones es cierta

- a) Es parabólica para  $xy > 0$
- b) Es hiperbólica para  $xy \neq 0$
- c) Es elíptica para  $xy \neq 0$
- d) Es hiperbólica para  $x > y$
- e) Es elíptica para todo  $(x, y)$

**Resolución** En esta EDP de segundo orden se tiene  $a(x, y) = x^2$ ,  $b(x, y) = -xy/2$ ,  $c(x, y) = y^2$ . Por tanto,  $b^2 - ac = -3/4x^2y^2$  y siempre que  $xy \neq 0$  la ecuación será elíptica.

5. Determinar las características de la siguiente EDP

$$e^{-y}u_{xx} + 2e^x u_{xy} + e^{2x+y}u_{yy} + u = 0$$

a)  $y = -\ln(C - e^x)/2$

b)  $y = -\ln(C - e^x)$

c)  $y = \ln(Cx - e^x)$

d)  $y = -\ln(C - 2e^x)$

e)  $y = \ln(C - e^{2x})$

donde  $C$  es una constante arbitraria.

**Resolución** En esta EDP de segundo orden se tiene  $a(x, y) = e^{-y}$ ,  $b(x, y) = e^x$ ,  $c(x, y) = e^{2x+y}$ . Por tanto,  $b^2 - ac = 0$  la ecuación es parabólica y las características son las soluciones de  $y' = b/a = e^{x+y}$  cuya solución es  $e^{-y} + e^x = C$ . Por tanto, la opción correcta es la (b).

6. Determinar el conmutador  $[L, M]$  de los operadores

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad Mu = x \frac{\partial u}{\partial y} - y \frac{\partial u}{\partial x} + zu.$$

a)  $[L, M] = -\frac{\partial}{\partial x}$

b)  $[L, M] = 2z \frac{\partial}{\partial y}$

c)  $[L, M] = 2 \frac{\partial}{\partial z}$

d)  $[L, M] = -y \frac{\partial}{\partial x}$

e)  $[L, M] = -2 \frac{\partial}{\partial y}$

**Resolución** Para evaluar el conmutador basta con usar la propiedad  $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$  y que  $[\partial/\partial x_i, x_j] = \delta_{ij}$ . Por tanto,

$$\begin{aligned} [L, M] &= \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2}, x \frac{\partial}{\partial y} \right] - \left[ \frac{\partial^2}{\partial y^2}, y \frac{\partial}{\partial x} \right] + \left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2}, z \right] \\ &= 2 \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial}{\partial x}, x \right] \frac{\partial}{\partial y} - 2 \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial}{\partial y}, y \right] \frac{\partial}{\partial x} + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial}{\partial z}, z \right] \\ &= 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} + 2 \frac{\partial}{\partial z}, \end{aligned}$$

y la respuesta correcta es la (c).

7. Sea el problema diferencial

$$\begin{aligned} 2xy u_x + u_y &= 0, & x, y > 0, \\ u(1, y) &= y^2, \end{aligned}$$

Evaluar la solución en el punto  $x = e$ ,  $y = 0$ .

- a)  $-1$
- b)  $1$
- c)  $0$
- d)  $1/2$
- e)  $-1/2$

**Resolución** Las características las da la EDO  $y' = 1/(2xy)$  cuyas soluciones son  $y^2 - \ln x = C$ . Por tanto, la solución general es  $u(x, y) = F(y^2 - \ln x)$  donde  $F$  es una función diferenciable arbitraria. Imponiendo que  $u(1, y) = y^2$  obtenemos que  $u(x, y) = y^2 - \ln x$  y por tanto  $u(e, 0) = -1$ .

8. Determinar el conmutador  $[L, M]$  de los operadores

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad Mu = (x^2 + y^2 + z^2)u.$$

- a)  $[L, M] = 4x$
- b)  $[L, M] = 3\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z}\right)$
- c)  $[L, M] = 2\left(x\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial x}\right)$
- d)  $[L, M] = 1 + 2\left(y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\right)$
- e)  $[L, M] = x^2 + y^2 + z^2$

**Resolución** El resultado se concluye de la siguiente secuencia de identidades

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, x^2 + y^2 + z^2\right] &= \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, x^2\right] + \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, y^2\right] \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial x}, x^2\right]\frac{\partial}{\partial y} + \left[\frac{\partial}{\partial y}, y^2\right]\frac{\partial}{\partial x} = 2x\frac{\partial}{\partial y} + 2y\frac{\partial}{\partial x}. \end{aligned}$$

9. Sea el problema de condiciones iniciales de la ecuación de primer orden

$$u_t = \frac{u_x}{u}, \quad u|_{t=0} = x.$$

Determinar cual de las siguientes opciones proporciona la función  $g$  apropiada para aplicar el método de la transformación hodográfica

$$x = -\frac{t}{u} + g(u),$$

y la solución correcta del problema.



- a)  $g(u) = \sqrt{u}$ ,  $u = \frac{1}{3}(x - \sqrt{x^2 + t})$   
 b)  $g(u) = u$ ,  $u = \frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 + 4t})$   
 c)  $g(u) = u$ ,  $u = \frac{1}{2}(x - \sqrt{x^2 + 4t})$   
 d)  $g(u) = \sqrt{u}$ ,  $u = \frac{1}{3}(x - \sqrt{x^2 + 4t})$   
 e)  $g(u) = 1/u$ ,  $u = \frac{1}{2}(x - \sqrt{x^2 + t})$

**Resolución** La PDE tiene la forma  $u_t = f(u)u_x$  y podemos aplicar la transformación hodográfica:

$$x + f(u)t = g(u)$$

esto es

$$x + t \frac{1}{u} = g(u).$$

Debemos imponer que  $u|_{t=0} = x$  que en la ecuación hodográfica implica

$$x + \frac{1}{u|_{t=0}} 0 = g(u|_{t=0}) \Rightarrow x = g(x)$$

y la ecuación hodográfica es

$$ux + t = u^2 \Rightarrow u = (x + \sqrt{x^2 + 4t})/2.$$

Luego la respuesta correcta es la b).

### 1.7.2. Problemas

1. Dada la EDP de primer orden

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 0$$

utilizando el método de la solución completa hallar la solución general.

**Resolución** Una integral completa de la ecuación viene dada por

$$u(x, y, a, b) = ax \pm ay + b$$

hallamos la envolvente de

$$u(x, y, a, b) = ax \pm ay + f(a)$$

resolviendo

$$u_a = x \pm y + f'(a)$$

y por ello

$$a = f'^{-1}(x \pm y)$$

y la solución general es

$$u = f'^{-1}(x \pm y)(x \pm y) + f(f'^{-1}(x \pm y)).$$

Se debe subrayar que la EDP en cuestión se escribe como

$$(u_x + u_y)(u_x - u_y) = 0.$$

Por tanto, existen dos soluciones generales

$$u = g(x + y), \quad u = g(x - y),$$

donde  $g$  es una función arbitraria. Este es el mismo resultado que el obtenido con la técnica de la solución completa.

2. Dada la EDP de primer orden

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} - \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 = 0$$

hallar la solución general.

**Resolución** Una integral completa viene dada por

$$u(x, y, z, a, b, c) = a^2x + b^2y + abz + c.$$

Hallemos la envolvente de la solución

$$u(x, y, z, a, b) = a^2x + b^2y + abz + f(a, b)$$

imponiendo

$$0 = u_a = 2ax + bz + f_a,$$

$$0 = u_b = 2by + az + f_b.$$

Por ello, si  $a(x, y, z), b(x, y, z)$  resuelve el anterior sistema tendremos la solución general  $u = a^2x + b^2y + abz + f(a, b)$ .

3. Dada la EDP de primer orden

$$u_y = \exp(u_x)$$

aplicar el método de la solución completa para determinar su solución general. Hallar alguna solución explícita con dependencia no lineal en  $x, y$ .

**Resolución** Una integral completa de la EDP es

$$u(x, y, a, b) = ax + \exp(a)y + b$$

hallemos la envolvente de

$$u(x, y, a) = ax + \exp(a)y + f(a).$$

Para ello debemos resolver

$$u_a = x + \exp(a)y + f'(a) = 0$$

que localmente determina una función  $a(x, y)$ . Por ello la solución general será  $u(x, y) = a(x, y)x + \exp(a(x, y))y + f(a(x, y))$ . En particular, si  $f = 0$  tenemos

$$a = \log\left(-\frac{x}{y}\right)$$

y por ello una solución es

$$u = \left(\log\left(-\frac{x}{y}\right) - 1\right)x.$$

### 1.7.3. Ejercicios

1. Determinar las partes real e imaginaria, el módulo y las derivadas parciales de primer orden de las funciones siguientes:

1)  $f(x, y, z) = \exp(i(k_1x + k_2y + k_3z))$ , siendo  $(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{R}^3$ .

2)  $f(x, y) = (x + y) \exp(x^2 + iy^2)$ .

3)  $f(x, y) = \exp(-(x^2 + y^2 + z^2))$ .

2. Determinar el orden de las siguientes ecuaciones e indicar cuáles son homogéneas o lineales:

1)  $u_x - xu_y = 0$ .

2)  $u + u_x u_y = 0$ .

3)  $\sqrt{1+x^2}(\cos y)u_x + u_x y - \exp(x/y)u = x^2$ .

4)  $u_t + u_{xxx} + uu_x = 0$ .

5)  $iu_t + u_{xx} + |u|^2 u = 0$ .

6)  $u_x + e^y u_y = x^2$ .

7)  $u_{xy} = e^u$ .

8)  $u_{tt} - \Delta u = xyz$ .

3. Determinar las superficies de nivel  $f = C^{te}$  de las funciones siguientes:

1)  $f(x, y, z, t) = \exp(i(k_1x + k_2y + k_3z - \omega t))$ , siendo  $k_1, k_2, k_3, \omega \in \mathbb{R}$ .

2)  $f(x, y, z, t) = \exp(i(kr - \omega t))$ , siendo  $r$  la distancia del punto  $(x, y, z)$  al origen y  $k, \omega \in \mathbb{R}$ .

Describir cómo se mueven dichas superficies.

4. Determinar la solución general de las ecuaciones:

1)  $u_x = x + y$ .

2)  $u_{xy} = 0$ .

5. Determinar alguna solución no trivial de las siguientes ecuaciones:

1)  $iu_t = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ .

2)  $(u_x)^2 = u_y + u_z \cdot (u_{ttt})^3$ .

3)  $u_x + v_y = 0$ .

6. Considérese el problema de contorno de Neumann

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{en } \delta\Omega. \end{cases}$$

1) Probar que sólo cuando se cumple que

$$\iiint_{\Omega} f \cdot dV = \iint_{\delta\Omega} g \cdot dS,$$

puede existir solución del problema.

2) Demostrar que cuando existe solución, es única salvo por una constante aditiva.

7. Clasificar las ecuaciones:

1)  $y u_{xy} + x u_{xx} = 0$ .

2)  $u_{xx} - 5u_{xy} = 0$ .

3)  $4u_{xx} - 12u_{xy} + 9u_{yy} + u_y = 0$ .

4)  $4u_{xx} + 6u_{xy} + 9u_{yy} = 0$ .

8. Considérese la ecuación:

$$3u_y + u_{xy} = 0.$$

1) Indicar su tipo.

2) Calcular su solución general. (Utilizar el cambio de variable dependiente  $v = u_y$ ).

3) Imponiendo las condiciones:

$$u(x, 0) = e^{-3x}, \quad u_y(x, 0) = 0,$$

averiguar si existe solución única.

9. Reducir la ecuación

$$u_{xx} + 3u_{yy} - 2u_x + 24u_y + 5u = 0,$$

a la forma

$$v_{xx} + v_{yy} + cv = 0.$$

10. Considérese la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + u = 0,$$

con las condiciones de contorno

$$u(0) = 0 \quad \text{y} \quad u(L) = 0.$$

La función  $u(x) \equiv 0$  es claramente solución. ¿Es la única solución posible para cualquier valor de  $L$ ?

11. Considérese el círculo de radio  $a$  con centro en el origen de coordenadas. Sean  $(r, \theta)$  coordenadas polares y  $(x, y)$  coordenadas cartesianas. Resolver el problema de Dirichlet interior

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ u|_{r=a} = f, \end{cases} \quad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2},$$

en los siguientes casos:

- 1)  $f = A$ ,
- 2)  $f = A \cos \theta$ ,
- 3)  $f = A + B y$ ,
- 4)  $f = A x y$ ,
- 5)  $f = A + B \sin \theta$ ,
- 6)  $f = A \sin^2 \theta + B \cos^2 \theta$ ,

donde  $A$  y  $B$  son constantes.

12. Resolver el problema de contorno interior de Neumann

$$\Delta u = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_C = f(\theta),$$

donde  $C$  es la circunferencia de radio  $a$  centrada en el origen de coordenadas, en los siguientes casos:

- 1)  $f = A$ ,
- 2)  $f = A \cos \theta$ ,
- 3)  $f = A \cos 2\theta$ ,
- 4)  $f = A \cos \theta + B$ ,
- 5)  $f = A \sin \theta + B \sin^3 \theta$ ,

donde  $A$  y  $B$  son constantes no nulas.

13. Considérese la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + u = 0,$$

con las condiciones de contorno

$$u(0) = 0 \quad \text{y} \quad u(L) = 0.$$

La función  $u(x) \equiv 0$  es claramente solución. ¿Es la única solución posible para cualquier valor de  $L$ ?

14. Considérese el círculo de radio  $a$  con centro en el origen de coordenadas. Sean  $(r, \theta)$  coordenadas polares y  $(x, y)$  coordenadas cartesianas. Resolver el problema de Dirichlet interior

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ u|_{r=a} = f, \end{cases} \quad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2},$$

en los siguientes casos:

- 1)  $f = A$ ,
- 2)  $f = A \cos \theta$ ,
- 3)  $f = A + By$ ,
- 4)  $f = Axy$ ,
- 5)  $f = A + B \sin \theta$ ,
- 6)  $f = A \sin^2 \theta + B \cos^2 \theta$ ,

donde  $A$  y  $B$  son constantes.

15. Resolver el problema de contorno interior de Neumann

$$\Delta u = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_C = f(\theta),$$

donde  $C$  es la circunferencia de radio  $a$  centrada en el origen de coordenadas, en los siguientes casos:

- 1)  $f = A$ ,
- 2)  $f = A \cos \theta$ ,
- 3)  $f = A \cos 2\theta$ ,
- 4)  $f = A \cos \theta + B$ ,
- 5)  $f = A \sin \theta + B \sin^3 \theta$ ,

donde  $A$  y  $B$  son constantes no nulas.

# CAPÍTULO 2

## Teoría espectral de operadores diferenciales. Análisis de Fourier

**I**NTRODUCIMOS en este tema las nociones básicas del análisis en espacios funcionales, que son necesarias para abordar la teoría de operadores diferenciales de tipo Sturm-Liouville. Estos operadores se usarán posteriormente en la resolución de EDP lineales separables. También se incluye en este tema una iniciación al análisis de Fourier, esto a las series de Fourier y a la transformada de Fourier. Los puntos que trataremos son:

1. Producto escalar en espacios funcionales
2. Conjuntos ortogonales de funciones
3. Operadores diferenciales simétricos
4. Autovalores y autofunciones. Operadores simétricos
5. Operadores de Sturm-Liouville
6. Series de Fourier
7. Transformada de Fourier

### 2.1. Producto escalar en espacios funcionales

Comenzamos esta sección realizando un rápido recordatorio de lo que aprendimos en Álgebra Lineal sobre espacios complejos con producto escalar, enfatizando los aspectos que son extensibles a espacios funcionales. Finalizamos viendo como la expresión del producto escalar en espacios funcionales cambia bajo transformaciones generales de coordenadas.

### 2.1.1. Producto escalar

producto escalar

Supongamos pues que tenemos un espacio vectorial complejo  $V$ , un producto escalar  $(\cdot, \cdot)$  no es más que una aplicación que a cada pareja de vectores de  $V$  le asigna un número complejo, que eso sí, debe satisfacer la siguiente lista de propiedades

**DEFINICIÓN 2.1.1.** *Un producto escalar en  $V$  es una aplicación  $(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  tal que*

- i)  $(u, v) = \overline{(v, u)}, \forall u, v \in V.$
- ii)  $(u, \alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha(u, v_1) + \beta(u, v_2), \forall u, v_1, v_2 \in V \text{ y } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$
- iii)  $(u, u) \geq 0, \forall u \in V; (u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0.$

norma

De las propiedades i) y ii) inferimos que  $(\alpha v_1 + \beta v_2, u) = \bar{\alpha}(v_1, u) + \bar{\beta}(v_2, u)$ . Vemos que  $(\cdot, \cdot)$  es casi una forma bilineal que a veces se denomina forma sesqui-lineal. La propiedad iii) nos dice que el producto escalar de un vector consigo mismo es siempre no negativo y que se anula tan sólo para el vector 0. El producto escalar nos permite dotar de longitud, que llamaremos norma, a los vectores:

$$\|u\| := \sqrt{(u, u)}.$$

desigualdad  
de Cauchy–  
Schwarz

Una desigualdad básica (desigualdad de Cauchy–Schwarz) que relaciona la norma y el producto escalar es

$$|(u, v)| \leq \|u\| \|v\|.$$

Se cumplen para la norma tres propiedades fundamentales

- i)  $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0.$
- ii)  $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|, \forall \alpha \in \mathbb{C} \text{ y } \forall u \in V.$
- iii)  $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$  (desigualdad triangular),  $\forall u, v \in V.$

Estas tres propiedades nos permiten definir una distancia en  $V$

$$d(u, v) := \|u - v\| = \sqrt{(u - v, u - v)}.$$

producto escalar  
de funciones

La noción de producto escalar tal como la hemos esbozado aquí se puede aplicar a **espacios funcionales**.

**DEFINICIÓN 2.1.2.** *Consideremos un abierto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  y una función  $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable y positiva ( $\rho(x) > 0 \forall x \in \Omega$ ). Dadas dos funciones  $u, v$  definidas sobre  $\Omega$  su producto escalar correspondiente a la función peso  $\rho$  se define en la forma*

$$(u, v) = \int_{\Omega} \bar{u}(x) v(x) \rho(x) d^n x.$$

Debemos recordar que la integral de funciones sobre  $\bar{\Omega}$  de funciones con valores complejos se entiende como:

$$\int_{\bar{\Omega}} u(x) \rho(x) d^n x := \int_{\bar{\Omega}} \operatorname{Re}(u(x)) \rho(x) d^n x + i \int_{\bar{\Omega}} \operatorname{Im}(u(x)) \rho(x) d^n x.$$



Obviamente, para que este producto escalar tenga sentido es necesario que la integral correspondiente<sup>1</sup> exista. Esta condición está garantizada si trabajamos en el espacio de funciones

$$\mathcal{L}_\rho^2(\overline{\Omega}) := \left\{ u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{C} \mid \|u\|^2 = \int_{\overline{\Omega}} |u(x)|^2 \rho(x) \, d^n x < \infty \right\}.$$

En realidad la operación  $(\cdot, \cdot)$  que acabamos de definir no es *estrictamente* un producto escalar, lo que falla es que existen funciones  $u(x) \neq 0$  no nulas en  $\Omega$  que tienen norma nula  $\|u\| = 0$ .<sup>2</sup> Para subsanar este problema debemos considerar que una función es la función cero si su norma lo es. Igualmente, dos funciones serán iguales si y solo si su diferencia tiene norma cero. El conjunto obtenido a partir de  $\mathcal{L}_\rho^2(\overline{\Omega})$  mediante estas identificaciones lo denotaremos por  $L_\rho^2(\overline{\Omega})$  y es un espacio vectorial de dimensión infinita con producto escalar. El producto escalar en  $L_\rho^2(\overline{\Omega})$  dota a este espacio de funciones de una estructura matemática que se conoce con el nombre de *espacio de Hilbert*.<sup>3</sup> Los elementos de  $L_\rho^2(\overline{\Omega})$  se denominan *funciones de cuadrado integrable* sobre  $\overline{\Omega}$ . Si  $\overline{\Omega}$  es un conjunto compacto (lo que equivale a que  $\Omega$  sea un conjunto acotado) entonces es claro que toda función diferenciable en  $\overline{\Omega}$  es de cuadrado integrable en  $\overline{\Omega}$ . Es decir

$$\overline{\Omega} \text{ compacto} \Rightarrow C^\infty(\overline{\Omega}) \subset L_\rho^2(\overline{\Omega}).$$

Si  $\overline{\Omega}$  no es compacto tal inclusión no es cierta y solo aquellas funciones diferenciables que decrezcan suficientemente rápido en el infinito serán de cuadrado integrable.

Espacios de Hilbert



## Ejemplos

1. Sea  $\Omega = (0, +\infty) \subset \mathbb{R}$ ;  $u(x) = x$  y  $v(x) = 1$ , si el peso es  $\rho(x) = 1$  entonces el producto escalar de  $u$  y  $v$  no existe ya que

$$(u, v) = \int_0^\infty x \, dx = \infty.$$

Si tomamos ahora el peso  $\rho(x) = e^{-x^2}$ , el producto escalar de  $u$  con  $v$  existe

$$(u, v) = \int_0^\infty x e^{-x^2} \, dx = 1/2.$$

2. Si tomamos el dominio  $\Omega = (0, 1)$  y el peso  $\rho(x) = 1$ , el producto escalar de las funciones  $u(x) = 1/x$  y  $v(x) = 1$  no está definido debido a la singularidad del integrando en  $x = 0$

$$(u, v) = \int_0^1 \frac{1}{x} \, dx = \infty.$$

Sin embargo, para el peso  $\rho(x) = x$  obtenemos el siguiente producto escalar

$$\int_0^1 x \frac{1}{x} \, dx = 1.$$

<sup>1</sup>Surge aquí la pregunta ¿Qué integral estamos utilizando?, el lector ya conoce la integral de Riemann; sin embargo, ésta no es completamente adecuada en este contexto. De hecho, es necesario utilizar una teoría de integración más sofisticada debida a Lebesgue.

<sup>2</sup>Por ejemplo, la función que sobre los racionales vale 1 y sobre los irracionales 0, es integrable Lebesgue y con norma 0.

<sup>3</sup>En rigor, lo que aquí hacemos no es más que considerar clases de equivalencia de funciones:  $u \sim v$  siempre que  $\|u - v\| = 0$ . El espacio cociente  $\mathcal{L}_\rho^2(\overline{\Omega}) / \sim$  es lo que denotamos por  $L_\rho^2(\overline{\Omega})$ .

3. Tomamos ahora  $\Omega = (0, 1)$ ,  $u(x) = x + ix^2$  y  $v(x) = 1 - ix$  con  $\rho(x) = 1$ . Entonces

$$(u, v) = \int_0^1 (x - ix^2)(1 - ix) dx = \int_0^1 (x - x^3 - 2ix^2) dx = 1/2 - 2i/3$$

y la norma de  $u$  es

$$\|u\|^2 = (u, u) = \int_0^1 |x + ix^2|^2 dx = \int_0^1 (x^2 + x^4) dx = 8/15.$$

4. Si  $\Omega = (0, 2\pi)$ ,  $u(x) = e^{ix}$  y  $v(x) = e^{2ix}$  con  $\rho(x) = 1$  obtenemos

$$(u, v) = \int_0^{2\pi} e^{-ix} e^{2ix} dx = 0$$

y el cuadrado de la longitud de  $u$  será

$$\|u\|^2 = \int_0^{2\pi} |e^{ix}|^2 dx = 2\pi.$$

### 2.1.2. Cambios de coordenadas

cambio de coordenadas

Hemos definido el producto escalar de funciones sobre dominios en  $\mathbb{R}^n$  usando coordenadas cartesianas. Sin embargo, por el teorema del cambio de variables del cálculo integral estos productos escalares se pueden expresar en otro tipo de coordenadas, apareciendo así, desde un punto de vista activo, un cambio de dominio y de función peso, que en este caso será el jacobiano de la transformación. Por ejemplo:

coordenadas polares

- Si el dominio de definición es el plano  $\mathbb{R}^2$  podemos considerar coordenadas polares y llegar a

$$(u, v) = \int_{\mathbb{R}^2} \bar{u}(x, y) v(x, y) \rho(x, y) dx dy = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \bar{u}(r, \theta) v(r, \theta) \rho(r, \theta) r dr d\theta.$$

Así, cuando cambiamos a coordenadas polares tenemos  $\rho(x, y) \rightarrow r\rho(r, \theta)$ .

coordenadas esféricas

- En el espacio  $\mathbb{R}^3$  tenemos las coordenadas esféricas y ahora

$$\begin{aligned} (u, v) &= \int_{\mathbb{R}^3} \bar{u}(x, y, z) v(x, y, z) \rho(x, y, z) dx dy dz \\ &= \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \bar{u}(r, \theta, \phi) v(r, \theta, \phi) \rho(r, \theta, \phi) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi. \end{aligned}$$

y  $\rho(x, y, z) \rightarrow r^2 \sin \theta \rho(r, \theta, \phi)$ .

**Ejemplos** Sean el peso  $\rho = 1$  y las funciones  $u(r, \theta, \phi) = e^{i\phi/2}/(r^2+1)$  y  $v(r, \theta, \phi) = \frac{\sin \theta}{r^2}$ ; entonces, su producto escalar es:

$$\begin{aligned}(u, v) &= \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{e^{-i\phi/2}}{(r^2+1)} \frac{\sin \theta}{r^2} r^2 \sin \theta \, d\phi \, d\theta \, dr \\&= \left[ \int_0^\infty \frac{dr}{1+r^2} \right] \left[ \int_0^\pi \sin^2 \theta \, d\theta \right] \left[ \int_0^{2\pi} e^{-i\phi/2} \, d\phi \right] \\&= \left[ \arctan r \right]_0^\infty \left[ \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^\pi \left[ 2i e^{-i\phi/2} \right]_0^{2\pi} = \left[ \frac{\pi}{2} \right] \left[ \frac{\pi}{2} \right] [2i(-2)] = -i\pi^2.\end{aligned}$$

## 2.2. Conjuntos ortogonales de funciones

En esta sección introducimos los conceptos de ortogonalidad, conjunto completo de funciones y base ortogonal de un espacio funcional.

conjunto ortogonal

**DEFINICIÓN 2.2.1.** Dado un conjunto de funciones  $\{u_n(x)\}_{n \in J}$  en  $L^2_\rho(\overline{\Omega})$ , donde  $J \subset \mathbb{Z}$  es un conjunto de índices finito o infinito, decimos que es **ortogonal** si  $(u_n, u_m) = 0, \forall n \neq m; n, m \in J$ .



### Ejemplos

- i) El conjunto  $\left\{ \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \right\}_{n \geq 1}$  es ortogonal en el intervalo  $[0, \ell]$  con peso  $\rho(x) = 1$ .  
Basta comprobar que

$$\begin{aligned}\int_0^\ell \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right) dx \\= \int_0^\ell \frac{1}{2} \left[ \cos\left(\frac{(n-m)\pi x}{\ell}\right) - \cos\left(\frac{(n+m)\pi x}{\ell}\right) \right] dx = 0,\end{aligned}$$

para  $n \neq m$ .<sup>4</sup>

<sup>4</sup>En el cálculo de la integral hemos reducido expresiones cuadráticas en funciones trigonométricas en formas lineales gracias a las fórmulas del seno y del coseno:

$$\begin{aligned}\cos(A \pm B) &= \cos A \cos B \mp \sin A \sin B, \\ \sin(A \pm B) &= \sin A \cos B \pm \cos A \sin B,\end{aligned}$$

que dan lugar a las fórmulas de suma siguiente

$$\begin{aligned}\sin A \sin B &= \frac{1}{2}(\cos(A-B) - \cos(A+B)), \\ \sin A \cos B &= \frac{1}{2}(\sin(A-B) + \sin(A+B)), \\ \cos A \cos B &= \frac{1}{2}(\cos(A-B) + \cos(A+B)).\end{aligned}$$

- ii) El conjunto  $\left\{ \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \right\}_{n \geq 0}$  es ortogonal en el intervalo  $[0, \ell]$  con peso  $\rho(x) = 1$ . Como antes tenemos que para  $n \neq m$

$$\begin{aligned} \int_0^\ell \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right) dx \\ = \int_0^\ell \frac{1}{2} \left[ \cos\left(\frac{(n-m)\pi x}{\ell}\right) + \cos\left(\frac{(n+m)\pi x}{\ell}\right) \right] dx = 0, \end{aligned}$$

### 2.2.1. Desarrollos en serie de funciones ortogonales

Dado un conjunto ortogonal  $\{u_n(x)\}_{n \in J}$  una cuestión importante es conocer qué tipo de funciones se pueden desarrollar en la forma  $v = \sum_{n \in J} c_n u_n$ . Cuando el conjunto de índices  $J$  que etiquetan el conjunto ortogonal es infinito, debemos tener sumo cuidado con el significado de la suma extendida a los índices en  $J$ . Si  $J = \mathbb{N}$  la expresión  $u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x)$  se entiende como el límite  $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N c_n u_n(x)$ . De igual forma cuando  $J = \mathbb{Z}$

$$u(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n u_n(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N c_n u_n(x) + \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^M c_{-m} u_{-m}(x).$$

convergencia  
puntual, uniforme  
y en media

Ahora bien, cuando tratamos con funciones hay varias nociones distintas de límite. En este curso hay tres nociones de límite que usaremos:

i) Límite puntual:  $\forall x_0 \in \overline{\Omega}$  tenemos  $u(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N c_n u_n(x_0)$ .

ii) Límite uniforme:  $\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{x \in \Omega} \left| u(x) - \sum_{n=1}^N c_n u_n(x) \right| = 0$ .

iii) Límite en media:  $\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| u - \sum_{n=1}^N c_n u_n \right\| = 0$ .<sup>5</sup>

A partir de este momento, salvo que digamos lo contrario, solo nos referiremos a series de funciones que convergen en media. Las propiedades siguientes sobre funciones desarrollables en serie de funciones ortogonales son de gran importancia.

<sup>5</sup>La convergencia uniforme implica la convergencia puntual, sin embargo el inverso no es cierto en general. Por otro lado, cuando el cierre de  $\Omega$  es compacto la convergencia uniforme implica la convergencia en media y de nuevo el recíproco no se verifica.

**PROPOSICIÓN 2.2.2.** ■ Si  $v$  admite un desarrollo  $v = \sum_{n \in J} c_n u_n$ , entonces este desarrollo es único y sus coeficientes  $c_n$  vienen determinados por

$$c_n = \frac{(u_n, v)}{\|u_n\|^2}. \quad (2.1)$$

■ Si  $v = \sum_{n \in J} c_n u_n$  y  $v' = \sum_{n \in J} c'_n u_n$  su producto escalar es

$$(v, v') = \sum_{n \in J} \bar{c}_n c'_n \|u_n\|^2. \quad (2.2)$$

■ Si  $v = \sum_{n \in J} c_n u_n$  su norma satisface la siguiente identidad (identidad de Parseval)

$$\|v\|^2 = \sum_{n \in J} \frac{|(u_n, v)|^2}{\|u_n\|^2}. \quad (2.3)$$

*Demostración.*<sup>6</sup>

■ Como  $v = \sum_{m \in J} c_m u_m$  y  $\{u_n\}_{n \in J}$  es ortogonal tenemos

$$(u_n, v) = (u_n, \sum_{m \in J} c_m u_m) = \sum_{m \in J} c_m (u_n, u_m) = c_n (u_n, u_n).$$

■ Como  $v = \sum_{n \in J} c_n u_n$  y  $v' = \sum_{m \in J} c'_m u_m$  su producto escalar vale

$$(v, v') = \sum_{n, m \in J} \bar{c}_n c'_m (u_n, u_m) = \sum_n \bar{c}_n c'_n \|u_n\|^2.$$

■ Es consecuencia de las dos anteriores tomando  $v' = v$ .

□

Otra propiedad relevante es la siguiente

ortogonalidad en espacios producto

Si  $\{u_n(x_1)\}_{n \in J_1}$  es ortogonal en el dominio  $\Omega_1$  con respecto al peso  $\rho_1(x)$  y  $\{v_m(x_2)\}_{m \in J_2}$  es ortogonal en el dominio  $\Omega_2$  con respecto al peso  $\rho_2(x)$ , entonces  $\{u_n(x_1)v_m(x_2)\}_{(n,m) \in J_1 \times J_2}$  es ortogonal en el dominio  $\Omega_1 \times \Omega_2$  con peso  $\rho_1(x_1)\rho_2(x_2)$ .

*Demostración.* Basta utilizar el teorema de Fubini para factorizar la integral

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} \bar{u}_n(x_1) \bar{v}_m(x_2) u_{n'}(x_1) v_{m'}(x_2) \rho(x_1) \rho(x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \left[ \int_{\Omega_1} \bar{u}_n(x_1) u_{n'}(x_1) \rho_1(x_1) dx_1 \right] \left[ \int_{\Omega_2} \bar{v}_m(x_2) v_{m'}(x_2) \rho_2(x_2) dx_2 \right] = 0 \end{aligned}$$

si  $n \neq n'$  ó  $m \neq m'$ .

□

<sup>6</sup>En esta demostración las sumas dentro del producto escalar la extraemos fuera de él. Esta manipulación es obviamente lícita siempre que las sumas sean finitas. Sin embargo, también resulta serlo en el caso de series convergentes en media.

### 2.2.2. Conjuntos ortogonales completos

**DEFINICIÓN 2.2.3.** Dado un conjunto ortogonal  $\{u_n\}_{n \in J}$  en  $L^2_\rho(\overline{\Omega})$  decimos que es completo cuando toda función  $u \in L^2_\rho(\overline{\Omega})$  se puede desarrollar como  $u = \sum_{n \in J} c_n u_n$ . En ese caso se dice que  $\{u_n\}_{n \in J}$  forma una base ortogonal del espacio  $L^2_\rho(\overline{\Omega})$ .

Si un conjunto ortogonal no es completo siempre puede ser extendido añadiendo nuevos elementos hasta formar una base ortogonal.

## 2.3. Operadores diferenciales simétricos

En esta sección se introduce la importante noción de operador diferencial simétrico.<sup>7</sup> Consideremos operadores diferenciales lineales  $L$

$$L = \sum_{\alpha} a_{\alpha}(x) D^{\alpha}.$$

Supondremos siempre que el operador está definido sobre un subespacio lineal de funciones  $\mathcal{D}$  en  $L^2_\rho(\overline{\Omega})$  que denominaremos *dominio* del operador.

operador diferen-  
cial simétrico

**DEFINICIÓN 2.3.1.** Diremos que un operador diferencial  $L$  es simétrico sobre un dominio  $\mathcal{D}$  siempre que

$$(u, Lv) = (Lu, v), \quad \forall u, v \in \mathcal{D}.$$

La forma natural de conseguir dominios en que un operador es simétrico es caracterizar el dominio imponiendo a sus elementos condiciones de contorno apropiadas.



**Ejemplos** Sea el operador

$$L = -\frac{d^2}{dx^2}, \quad \Omega = (a, b) \text{ acotado en } \mathbb{R}.$$

Para determinar dominios  $\mathcal{D} \subset L^2([a, b])$  en que este operador es simétrico, observemos que para todo par de funciones diferenciables  $u$  y  $v$  en  $[a, b]$

$$\begin{aligned} (u, Lv) &= \int_a^b \bar{u}(x)(-v''(x)) \, dx = -(\bar{u}(x)v'(x)) \Big|_a^b + \int_a^b \bar{u}'(x)v'(x) \, dx \\ &= (-\bar{u}(x)v'(x) + \bar{u}'(x)v(x)) \Big|_a^b + \int_a^b (-\bar{u}''(x)v(x)) \, dx \\ &= (-\bar{u}(x)v'(x) + \bar{u}'(x)v(x)) \Big|_a^b + (Lu, v); \end{aligned}$$

<sup>7</sup>Hemos de subrayar aquí que la noción de operador simétrico aparece también con los nombres de operador hermitico y operador autoadjunto

por tanto un dominio de simetría debe verificar que

$$\left( -\bar{u}(x)v'(x) + \bar{u}'(x)v(x) \right) \Big|_a^b = 0, \quad \forall u, v \in \mathcal{D}. \quad (2.4)$$

Para este operador existen tres tipos de condiciones de contorno que determinan dominios de simetría de especial relevancia. En todos los casos es inmediato verificar que se satisface (2.4)

### i) Dirichlet homogénea

condiciones de Dirichlet

$$\mathcal{D} := \left\{ u \in C^\infty([a, b]) : u(a) = u(b) = 0 \right\}.$$

### ii) Neumann homogénea

condiciones de Neumann

$$\mathcal{D} := \left\{ u \in C^\infty([a, b]) : u'(a) = u'(b) = 0 \right\}.$$

### iii) Periódicas

condiciones periódicas

$$\mathcal{D} := \left\{ u \in C^\infty([a, b]) : u(a) = u(b), u'(a) = u'(b) \right\}.$$

## 2.4. Autovalores y autofunciones. Operadores simétricos

Vamos a introducir ahora dos conceptos fundamentales: autovalores y autofunciones de un operador diferencial. También demostraremos que cuando el operador diferencial es simétrico sus autovalores y autofunciones verifican propiedades importantes.

### 2.4.1. Problemas de autovalores

**DEFINICIÓN 2.4.1.** Dado un operador diferencial lineal  $L$  sobre un dominio  $\mathcal{D}$ , decimos que  $\lambda \in \mathbb{C}$  es un **autovalor** cuando existe una función no nula  $u \in \mathcal{D}$  tal que

$$Lu = \lambda u.$$

En ese caso  $u$  se denomina **autofunción o función propia** del operador  $L$  correspondiente al autovalor  $\lambda$ . El conjunto  $\sigma(L)$  de todos los autovalores de  $L$  se denomina **espectro** de  $L$ . Para cada autovalor  $\lambda \in \sigma(L)$  se define su **subespacio propio** correspondiente como el subespacio lineal siguiente

$$\mathcal{D}_\lambda := \{ u \in \mathcal{D} : Lu = \lambda u \}.$$

Cuando  $\dim \mathcal{D}_\lambda = 1$  decimos que el autovalor es **simple** y si  $\dim \mathcal{D}_\lambda \geq 2$  que es **degenerado**.

### Ejemplos

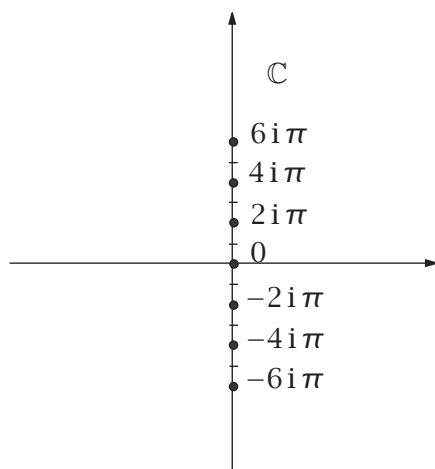
i) Sea

$$L = \frac{d}{dx}, \quad \text{con } \mathcal{D} = \{u \in C^\infty([0, 1]) | u(0) = 0\}.$$

El problema de autovalores es

$$\frac{d u}{d x} = \lambda u, \quad u(0) = 0, u \neq 0.$$

La solución a la ecuación diferencial es  $u(x) = ce^{\lambda x}$  y la condición de frontera implica que  $c = 0$  y por ello  $u = 0$ . Luego no hay autovalores y por ello  $\sigma(L) = \emptyset$ .



ii) Sea ahora el operador anterior pero en un dominio diferente asociado a condiciones de contorno periódicas:

$$L = \frac{d}{dx},$$

$$\text{con } \mathcal{D} = \{u \in C^\infty([0, 1]) | u(0) = u(1)\}.$$

De nuevo  $u(x) = ce^{\lambda x}$  y la condición de frontera implica  $e^\lambda = 1$ ; esto es:

$$\sigma(L) = \{2ni\pi\}_{n \in \mathbb{Z}},$$

con los subespacios propios  $\mathcal{D}_{2ni\pi} = \mathbb{C}e^{2ni\pi x}$  y autovalores simples ( $\dim \mathcal{D}_{2ni\pi} = 1$ ). En la figura adjunta se observa la distribución del espectro en el plano complejo.

**Problemas de autovalores en una dimensión** Consideremos un problema de autovalores

$$Lu = \lambda u, \quad u \in \mathcal{D},$$

en una dimensión. Supongamos que el operador es de la forma

$$Lu = \sum_{n=0}^N a_n(x) D^n u(x),$$

y que el dominio viene determinado por una serie de condiciones de contorno sobre un intervalo acotado  $[a, b]$

$$l_j(u) = 0, \quad j = 1, \dots, N,$$

donde  $N$  coincide con el orden del operador  $L$ . Para resolver el problema espectral podemos proceder como sigue:



1. Se resuelve la ecuación diferencial ordinaria lineal homogénea  $Lu = \lambda u$  considerando  $\lambda$  como un parámetro. La solución general será de la forma

$$u(\lambda, x) = c_1 u_1(\lambda, x) + \cdots + c_N u_N(\lambda, x),$$

siendo  $\{u_i\}_{i=1,\dots,N}$  un conjunto máximo de soluciones linealmente independientes.

2. Se imponen las condiciones de contorno a la solución general

$$l_j(u) = 0, \quad j = 1, \dots, N.$$

Lo que resulta es un sistema de  $N$  ecuaciones lineales homogéneas

$$l_j(u_1)c_1 + \cdots + l_j(u_N)c_N = 0, \quad j = 1, \dots, N,$$

para los  $N$  coeficientes de la solución general. Los elementos  $\lambda$  del espectro de  $L$  están caracterizados por la propiedad de admitir soluciones  $u \in \mathcal{D}$  no nulas de  $Lu = \lambda u$ . Pero esto ocurre si y solo si el sistema de ecuaciones para  $(c_1, \dots, c_N)$  admite soluciones no triviales  $(c_1, \dots, c_N) \neq (0, \dots, 0)$ . A su vez esto tiene lugar si y sólo si se anula el determinante de la matriz de coeficientes del sistema

$$\begin{vmatrix} l_1(u_1) & \cdots & l_1(u_N) \\ \vdots & & \vdots \\ l_N(u_1) & \cdots & l_N(u_N) \end{vmatrix} = 0.$$

Esta condición constituye una ecuación del tipo

$$f(\lambda) = 0,$$

y sus soluciones forman el espectro  $\sigma(L)$ .

3. Para cada  $\lambda_n \in \sigma(L)$  resolvemos el sistema lineal correspondiente para  $(c_1, \dots, c_N)$  y determinamos la solución general  $u = u(\lambda_n, x)$  que constituirá el espacio propio asociado  $\mathcal{D}_{\lambda_n}$ .

## 2.4.2. Autovalores y autofunciones de operadores simétricos

**Teorema 2.4.2. Espectro de operadores simétricos.** *Si  $L$  es un operador diferencial simétrico sobre un dominio  $\mathcal{D}$  entonces se satisfacen las siguientes propiedades:*

- *Los autovalores son números reales*

$$\sigma(L) \subset \mathbb{R}.$$

- *Si  $u, v \in \mathcal{D}$  son autofunciones correspondientes a autovalores diferentes entonces son ortogonales*

$$(u, v) = 0.$$

*Demostración.* ■ Si  $\lambda \in \sigma(L)$  entonces existe una función no nula  $u \in \mathcal{D}$  tal que  $Lu = \lambda u$ . Por ello,

$$(Lu, u) = (\lambda u, u) = \bar{\lambda} \|u\|^2, \quad (u, Lu) = (u, \lambda u) = \lambda \|u\|^2,$$

y como el operador es simétrico  $(Lu, u) = (u, Lu)$  y  $\|u\| \neq 0$  debemos tener  $\bar{\lambda} = \lambda$ . Luego  $\lambda$  es un número real.

- Dados dos elementos distintos  $\lambda, \mu$  del espectro de  $L$ , que ya sabemos que serán números reales, existen autofunciones  $u$  y  $v$  tales que  $Lu = \lambda u$  y  $Lv = \mu v$ ; por tanto,

$$(Lu, v) = \lambda(u, v), \quad (u, Lv) = \mu(u, v).$$

Como  $L$  es simétrico,  $(Lu, v) = (u, Lv)$  y por ello  $(\lambda - \mu)(u, v) = 0$  y así, como  $\lambda \neq \mu$ , se deduce  $(u, v) = 0$ .

□

## 2.5. Operadores de Sturm–Liouville en una dimensión

operadores de  
Sturm–Liouville

Esta sección está dedicada a un tipo especial de operadores diferenciales: los operadores de Sturm–Liouville. En primer lugar definimos esta clase de operadores en el caso más sencillo (caso regular), analizamos dominios en los que son simétricos y estudiamos las propiedades de su espectro y sus autofunciones. Posteriormente consideramos brevemente los operadores de Sturm–Liouville en el caso singular y, por último, abordaremos tres ejemplos de operadores de Sturm–Liouville particularmente relevantes: el operador de Schrödinger, el operador de Legendre y el operador de Bessel.

**DEFINICIÓN 2.5.1.** Un operador de segundo orden definido sobre un dominio de  $L^2_\rho([a, b])$  es del tipo de Sturm–Liouville si es de la forma

$$Lu = \frac{1}{\rho} \left[ -\frac{d}{dx} \left( p \frac{du}{dx} \right) + qu \right],$$

con  $\rho, p, q$  funciones diferenciables reales y  $\rho, p \neq 0$  en  $(a, b)$ .

### 2.5.1. Caso regular

Se dice que un operador de Sturm–Liouville es **regular** sobre un dominio

$$\mathcal{D} := \left\{ u \in C^\infty([a, b]) : \alpha_i u(a) + \tilde{\alpha}_i u(b) + \beta_i \frac{du}{dx}(a) + \tilde{\beta}_i \frac{du}{dx}(b) = 0, \quad i = 1, 2 \right\}, \quad (2.5)$$

con  $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_1', \tilde{\beta}_1, \tilde{\alpha}_2, \alpha_1, \beta_2, \beta_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$  y (condiciones de contorno linealmente independientes)

$$\text{rango} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \tilde{\alpha}_1 & \beta_1 & \tilde{\beta}_1 \\ \alpha_2 & \tilde{\alpha}_2 & \beta_2 & \tilde{\beta}_2 \end{pmatrix} = 2,$$

operadores de  
Sturm–Liouville  
regulares

si el intervalo abierto  $(a, b)$  es acotado ( $a \neq -\infty$  y  $b \neq \infty$ ) y, las funciones  $\rho, p, q$  son diferenciables en el intervalo cerrado  $[a, b]$  y  $\rho, p > 0$  en el intervalo cerrado  $[a, b]$ .

### Carácter simétrico

Se presenta la cuestión siguiente: ¿Para qué dominios un operador de Sturm–Liouville regular resulta ser simétrico? la respuesta es

operadores de  
Sturm–Liouville  
simétricos

**Teorema 2.5.2.** *Un operador de Sturm–Liouville  $L$  regular sobre un dominio  $\mathcal{D}$  es simétrico si y sólo si  $\forall u, v \in \mathcal{D}$  se verifica*

$$p(a) \begin{vmatrix} \bar{u}(a) & v(a) \\ \frac{d\bar{u}}{dx}(a) & \frac{dv}{dx}(a) \end{vmatrix} = p(b) \begin{vmatrix} \bar{u}(b) & v(b) \\ \frac{d\bar{u}}{dx}(b) & \frac{dv}{dx}(b) \end{vmatrix}. \quad (2.6)$$

*Demostración.* Para demostrarlo basta con probar que la diferencia  $(Lu, v) - (u, Lv)$  se anula para todo  $u, v \in \mathcal{D}$  cuando la identidad (2.6) se satisface. Ello es cierto dado que si  $u, v \in \mathcal{D}$

$$\begin{aligned} (Lu, v) - (u, Lv) &= \int_a^b \left[ -\bar{u}(x) \left( \frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{dv}{dx}(x) \right) \right) + \left( \frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{d\bar{u}}{dx}(x) \right) \right) v(x) \right] \\ &= \int_a^b \frac{d}{dx} \left[ p(x) \left( \frac{d\bar{u}}{dx} v - \bar{u} \frac{dv}{dx} \right) \right] = - \left[ p(x) \left( \frac{d\bar{u}}{dx} v - \bar{u} \frac{dv}{dx} \right) \right] \Big|_a^b \\ &= p(b) \begin{vmatrix} \bar{u}(b) & v(b) \\ \frac{d\bar{u}}{dx}(b) & \frac{dv}{dx}(b) \end{vmatrix} + p(a) \begin{vmatrix} \bar{u}(a) & v(a) \\ \frac{d\bar{u}}{dx}(a) & \frac{dv}{dx}(a) \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Observar que la contribución de  $q$  se cancela. Por tanto, el carácter simétrico de  $L$ :

$$(Lu, v) = (u, Lv), \quad \forall u, v \in \mathcal{D}$$

es equivalente al criterio dado.  $\square$

A continuación mostramos algunos ejemplos básicos de condiciones de frontera que garantizan la condición (2.4) y que por tanto determinan dominios sobre los que los operadores de Sturm–Liouville regulares son simétricos.

#### 1) Condiciones de contorno separadas,

condiciones sepa-  
radas

$$\begin{aligned} \alpha u(a) + \tilde{\alpha} \frac{du}{dx}(a) &= 0, \\ \beta u(b) + \tilde{\beta} \frac{du}{dx}(b) &= 0; \end{aligned}$$

dos casos particularmente relevantes de éstas son las condiciones de **Dirichlet**

$$u(a) = 0, \quad u(b) = 0,$$

y las de **Neumann**

$$\frac{du}{dx}(a) = 0, \quad \frac{du}{dx}(b) = 0.$$

#### 2) Condiciones periódicas

condiciones  
periódicas

$$u(a) = u(b), \quad p(a) \frac{du}{dx}(a) = p(b) \frac{du}{dx}(b).$$

espectro para operadores de Sturm–Liouville regulares

Aunque estas condiciones de contorno recogen la mayoría de las que aparecen en las aplicaciones, no cubren, sin embargo, la totalidad de condiciones que determinan dominios en los que  $L$  es simétrico.<sup>8</sup>

## Espectro

Cuando un operador de Sturm–Liouville es simétrico, debido al teorema general sobre operadores simétricos, sus autovalores son reales, y sus autofunciones correspondientes a autovalores distintos son ortogonales. En el caso regular podemos afirmar además que

**Teorema 2.5.3.** *Los módulos de los autovalores  $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$  de un operador de Sturm–Liouville  $L$  regular y simétrico en un dominio  $\mathcal{D}$ , se pueden ordenar en una secuencia creciente y no acotada*

$$|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_n| \leq \dots$$

*Existe una base ortogonal  $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$  de  $L^2_\rho([a, b])$  formada por autofunciones de  $L$  y el correspondiente desarrollo de cualquier  $u \in \mathcal{D}$*

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n,$$

*converge uniformemente a  $u$ .*

Cuando las condiciones de contorno son separadas<sup>5</sup> podemos afirmar también que

<sup>8</sup>Clases más amplias de condiciones de contorno, que contienen a las ya descritas y aseguran el carácter simétrico, para operadores de Sturm–Liouville regulares son aquellas con

$$(\tilde{\alpha}_1 \tilde{\beta}_2 - \tilde{\beta}_1 \tilde{\alpha}_2) p(a) = (\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2) p(b).$$

<sup>5</sup>Un teorema similar para operadores regulares sobre dominios con condiciones periódicas o anti-periódicas del tipo:  $u(a) = \pm u(b)$ ,  $u'(a) = \pm u'(b)$  con  $p(a) = p(b)$  nos dice que los autovalores asociados a estos dos dominios  $\{\lambda_n^{(+)}\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $\{\lambda_n^{(-)}\}_{n=0}^{\infty}$ , respectivamente, se ordenan en la siguiente secuencia

$$-\infty < \lambda_0^{(+)} < \lambda_1^{(-)} \leq \lambda_2^{(-)} < \lambda_1^{(+)} \leq \lambda_2^{(+)} < \lambda_3^{(-)} \leq \lambda_4^{(-)} < \lambda_3^{(+)} \leq \lambda_4^{(+)} < \dots$$

Si se da la igualdad es que el autovalor es doble y no simple. La secuencia, al ser el operador simétrico, no puede tener puntos de acumulación finitos y por ello es no acotada. La autofunción  $u_0^{(+)}(x)$  no tiene ceros en  $[a, b]$ ,  $u_{2n+1}^{(+)}(x)$  y  $u_{2n+2}^{(+)}(x)$  tienen  $(2n+2)$  ceros en  $[a, b]$  en tanto que  $u_{2n+1}^{(-)}(x)$  y  $u_{2n+2}^{(-)}(x)$  poseen  $(2n+1)$  ceros en  $[a, b]$ .

**Teorema 2.5.4.** *Para un operador de Sturm–Liouville regular en un dominio con condiciones de contorno separadas se cumple:*

**Existencia de autovalor mínimo** *Si  $p > 0$  los autovalores forman una sucesión monótona creciente acotada inferiormente*

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n < \cdots,$$

*divergente  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$ . Si  $p < 0$  el resultado anterior es válido para  $\{-\lambda_n\}$ .*

**No degeneración** *Los autovalores  $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$  son simples.*

**Oscilación** *La autofunción  $u_n(x)$  correspondiente al  $n$ -ésimo autovalor  $\lambda_n$  tiene  $(n - 1)$  ceros en el intervalo  $(a, b)$ .*

### 2.5.2. Caso singular

Un operador de Sturm–Liouville se dice **singular** cuando no es regular. Es decir cuando al menos se verifica una de las siguientes condiciones

operadores de  
Sturm–Liouville  
singulares

- O bien  $a = -\infty$  ó  $b = +\infty$ .
- Una al menos de las funciones  $\rho, p, q$  es singular en  $a$  ó en  $b$ .
- Una al menos de las funciones  $\rho, p$  se anula en  $a$  ó en  $b$ .

Si  $[a, b]$  es acotado es fácil repetir la demostración hecha anteriormente para el caso regular para probar que un operador de Sturm–Liouville singular con dominio  $\mathcal{D}$  en  $L^2([a, b])$  es simétrico si y solo si  $\forall u, v \in \mathcal{D}$  se verifica

$$\lim_{x \rightarrow a} \left( p(x) \left| \begin{array}{cc} \bar{u}(x) & v(x) \\ \frac{d}{dx} \bar{u}(x) & \frac{d}{dx} v(x) \end{array} \right| \right) = \lim_{x \rightarrow b} \left( p(x) \left| \begin{array}{cc} \bar{u}(x) & v(x) \\ \frac{d}{dx} \bar{u}(x) & \frac{d}{dx} v(x) \end{array} \right| \right). \quad (2.7)$$

Cuando el operador es simétrico se cumplen las propiedades del teorema general de autovalores y autofunciones de un operador simétrico. Sin embargo el problema fundamental para operadores singulares es que sus autofunciones  $u \in \mathcal{D}$  no forman un conjunto completo en general. En tales casos debemos tomar soluciones  $u$  de la ecuación  $Lu = \lambda u$  fuera no sólo del dominio  $\mathcal{D}$  del operador sino también de  $L^2_\rho([a, b])$  (autofunciones generalizadas).

### 2.5.3. Operadores de Schrödinger, Legendre y Bessel

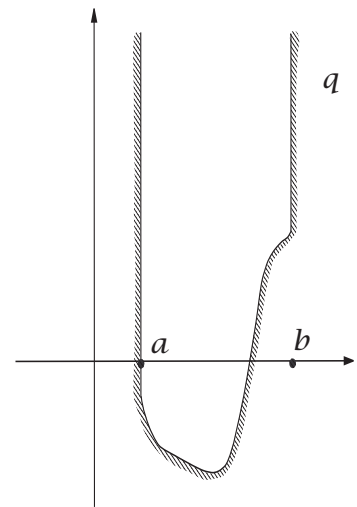
Revisamos ahora tres de los tipos más relevantes de operadores diferenciales que aparecen en Física:

operadores de Schrödinger

**i) Operador de Schrödinger:** Elegimos  $\rho(x) = 1$  y  $p(x) = \hbar^2/2m \in \mathbb{R}$  de tal modo que

$$Lu = -\hbar^2/2m \frac{d^2 u}{dx^2} + q(x)u.$$

Las condiciones de frontera generales (2.7) antes expuestas permiten fácilmente definir dominios en los que el operador es simétrico. Este es un operador fundamental en Mecánica Cuántica ya que el problema de autovalores correspondiente describe las energías y los estados estacionarios que caracterizan una partícula en un campo de fuerzas que deriva del potencial  $q = q(x)$ . Parte de la dinámica del sistema depende también de las condiciones de contorno. Por ejemplo, si imponemos condiciones de Dirichlet en un intervalo acotado  $[a, b]$ , estamos describiendo una partícula confinada en  $[a, b]$  que se mueve de acuerdo con el potencial  $q$ . Esta interpretación se ilustra en la figura.<sup>9</sup> En este caso el operador de Schrödinger constituye un problema de Sturm-Liouville regular simétrico y por ello el espectro, el conjunto de valores de energía posibles, es discreto, simple y forma una secuencia creciente no acotada. Más aún, según las propiedades de oscilación, el estado de energía mínima (estado fundamental) no tiene ceros, el primer excitado uno, y así sucesivamente.



operadores de Legendre

**ii) Operador de Legendre:** Está determinado por

$$\rho(x) = 1, \quad p(x) = 1 - x^2, \quad q(x) = 0, \quad [a, b] = [-1, 1].$$

Así, podemos escribir

$$Lu = -\frac{d}{dx} \left[ (1 - x^2) \frac{du}{dx} \right] = -(1 - x^2) \frac{d^2 u}{dx^2} + 2x \frac{du}{dx}.$$

Debemos subrayar que el operador de Legendre es singular en el intervalo  $[-1, 1]$  ya que  $p$  se anula en  $\pm 1$ . Como  $p(1) = p(-1) = 0$ , aplicando (2.7) tenemos que el operador es simétrico en el dominio  $\mathcal{D} = C^\infty([-1, 1])$  de  $L^2([-1, 1])$ .

La ecuación de autovalores del operador de Legendre

$$Lu = -(1 - x^2) \frac{d^2 u}{dx^2} + 2x \frac{du}{dx} = \lambda u,$$

es la llamada ecuación de Legendre. Del estudio de esta ecuación diferencial ordinaria se concluye que sólo hay soluciones en  $\mathcal{D}$  cuando  $\lambda = n(n+1)$  donde  $n \geq 0$ .<sup>10</sup> Además

<sup>9</sup>Debemos tener en cuenta que las paredes impenetrables no vienen dadas por  $q$ , que es diferenciable, sino por las condiciones de Dirichlet en  $a$  y  $b$ , donde se anula la función de onda. La gráfica ilustra pues el potencial físico:  $q$  en  $(a, b)$ , diferenciable, y condiciones de contorno en  $a$  y en  $b$ .

<sup>10</sup>La forma de demostrar estas propiedades es utilizar la técnica de Frobenius. Al desarrollar en serie se observa que el único caso en que las series convergen a funciones diferenciables en  $[-1, 1]$ , es cuando  $\lambda = n(n+1)$ , que produce la truncación de las series en polinomios.

las autofunciones respectivas vienen dadas por los polinomios de Legendre

$$p_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{d x^n},$$

cuya norma es

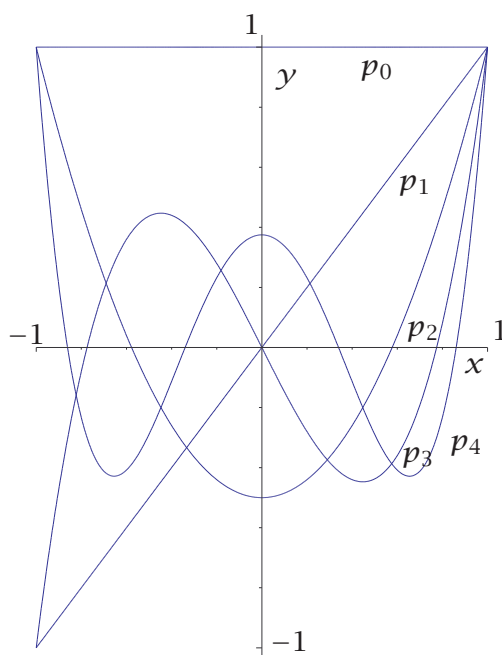
$$\|p_n\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}.$$

polinomios de Legendre

Los primeros polinomios de Legendre son

$n$	$\lambda$	$p_n$
0	0	1
1	2	$x$
2	6	$(3x^2 - 1)/2$
3	12	$(5x^3 - 3x)/2$
4	20	$(35x^4 - 30x^2 + 3)/8$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Las gráficas de estos polinomios



A pesar del carácter singular del operador, el conjunto de autofunciones  $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$  es una base ortogonal de  $L^2([-1, 1])$ . Por lo tanto toda  $u \in L^2([-1, 1])$  admite un desarrollo en serie de polinomios de Legendre

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(x).$$

operadores de Bessel

### iii) Operador de Bessel Tomamos ahora

$$\rho(x) = x, \quad p(x) = x, \quad q_m(x) = \frac{m^2}{x}, \quad m \geq 0.$$

El operador correspondiente es

$$L_m u = -\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left[ x \frac{du}{dx} \right] + \frac{m^2}{x^2} u = -\frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{1}{x} \frac{du}{dx} + \frac{m^2}{x^2} u.$$

La ecuación diferencial asociada al problema de autovalores  $Lu = \lambda u$  es

$$-\frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{1}{x} \frac{du}{dx} + \left[ \frac{m^2}{x^2} - \lambda \right] u = 0, \quad (2.8)$$

que con el cambio de variable

$$\tilde{x} := \sqrt{\lambda} x,$$

se transforma en la ecuación de Bessel

$$\frac{d^2 u}{d\tilde{x}^2} + \frac{1}{\tilde{x}} \frac{du}{d\tilde{x}} + \left( 1 - \frac{m^2}{\tilde{x}^2} \right) u = 0,$$

cuyas solución general es de la forma

$$u(\tilde{x}) = c_1 J_m(\tilde{x}) + c_2 N_m(\tilde{x}),$$

donde  $J_m$  son las funciones de Bessel y  $N_m$  las de Neumann.<sup>11</sup> Por ello, la solución general de la ecuación de autovalores (2.8) es

$$u(x) = c_1 J_m(\sqrt{\lambda} x) + c_2 N_m(\sqrt{\lambda} x). \quad (2.9)$$

funciones de Bessel

Cerca del origen el comportamiento de las funciones de Bessel y Neumann es

$$\begin{aligned} J_m(x) &\sim \frac{1}{\Gamma(m+1)} \left( \frac{x}{2} \right)^m, \\ N_m(x) &\sim \begin{cases} \frac{2}{\pi} \ln(x) & m = 0, \\ -\frac{\Gamma(m)}{\pi(2x)^m} & m \neq 0, \end{cases} \quad x \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Hay dos tipos de intervalos  $[a, b]$  que nos interesan, con  $a > 0$  y con  $a = 0$ . Cuando  $a > 0$  el operador es regular y es simétrico sobre los dominios descritos en el teorema 2.5.2. Sin embargo, el operador es singular cuando  $a = 0$ , por una cualquiera de las tres siguientes razones  $\rho(0) = 0$ ,  $p(0) = 0$  ó por no ser  $q_m(x)$  diferenciable en  $x = 0$ . En este caso un dominio conveniente sobre el cual el operador  $L_m$  es simétrico cuando  $m > 0$  es el siguiente subespacio lineal de  $L^2([0, b])$ .

$$\mathcal{D}_m = \left\{ u \in C^\infty((0, b]) : u(b) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} (x^m u(x)) = 0, \exists \lim_{x \rightarrow 0} \left( x^{1-m} \frac{du}{dx} \right) \right\},$$

<sup>11</sup>Las funciones de Bessel y Neumann poseen el siguiente comportamiento en el infinito

$$\begin{aligned} J_m(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left( x - (2m+1) \frac{\pi}{4} \right) + \mathcal{O}(x^{-3/2}), \\ N_m(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin \left( x - (2m+1) \frac{\pi}{4} \right) + \mathcal{O}(x^{-3/2}), \end{aligned} \quad x \rightarrow \infty.$$



El carácter simétrico se deduce teniendo en cuenta que para funciones  $u$  y  $v$  en  $\mathcal{D}_m$  los dos límites

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ x^{1-m} \frac{d\bar{u}}{dx}(x) x^m v(x) - x^m \bar{u}(x) x^{1-m} \frac{dv}{dx} \right],$$

y

$$\lim_{x \rightarrow b} \left[ x^{1-m} \frac{d\bar{u}}{dx}(x) x^m v(x) - x^m \bar{u}(x) x^{1-m} \frac{dv}{dx} \right],$$

son ambos iguales a cero, luego la condición (2.7) se satisface. Además, si consideramos la solución (2.9)

$$u(x) = c_1 J_m(\sqrt{\lambda}x) + c_2 N_m(\sqrt{\lambda}x),$$

de la ecuación de autovalores y tenemos en cuenta el comportamiento en el origen (2.10) de las funciones de Bessel, vemos que las condiciones en  $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^m u(x)) = 0, \exists \lim_{x \rightarrow 0} \left( x^{1-m} \frac{du}{dx} \right),$$

se cumplen si  $c_2 = 0$ . Además  $J_m$  está en  $C^\infty((0, b])$  si  $m \in \mathbb{N}$ . Por ello, nos ocuparemos solo del caso en que  $m$  es natural. Imponiendo ahora la condición de contorno  $u(b) = 0$ , llegamos a la siguiente condición para determinar los autovalores  $\lambda_n$

$$J_m(\sqrt{\lambda}b) = 0.$$

Debido al carácter simétrico del operador, las autofunciones

$$u_n(x) = J_m(\sqrt{\lambda_n}x), \quad n = 1, 2, \dots$$

forman un conjunto ortogonal

$$(u_n, u_{n'}) = \int_0^b J_m(\sqrt{\lambda_n}x) J_{n'}(\sqrt{\lambda_{n'}}x) x dx = \frac{b^2}{2} \left[ \frac{dJ_m}{dx}(\sqrt{\lambda_n}b) \right]^2 \delta_{nn'}.$$

Además este conjunto resulta ser completo en  $L_x^2([0, b])$ . Así, cualquier función  $u \in L_x^2([0, b])$  puede desarrollarse como

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_m(\sqrt{\lambda_n}x).$$

Cuando  $m = 0$  un dominio conveniente es

$$\mathcal{D}_0 = \left\{ u \in C^\infty((0, b]) : u(b) = 0, \exists \lim_{x \rightarrow 0} u(x), \lim_{x \rightarrow 0} \left( x \frac{du}{dx} \right) = 0 \right\}.$$

El carácter simétrico lo inferimos observado que, para cualesquiera pareja de funciones  $u$  y  $v$  en  $\mathcal{D}_0$ , los límites

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ x \frac{d\bar{u}}{dx}(x) v(x) - \bar{u}(x) x \frac{dv}{dx} \right],$$

y

$$\lim_{x \rightarrow b} \left[ x \frac{d\bar{u}}{dx}(x) v(x) - \bar{u}(x) x \frac{dv}{dx} \right],$$

son nulos, satisfaciéndose de esta manera (2.7). Por otro lado, la solución general de la ecuación de autovalores

$$u(x) = c_1 J_0(\sqrt{\lambda}x) + c_2 N_0(\sqrt{\lambda}x),$$

cumple las condiciones en  $x = 0$

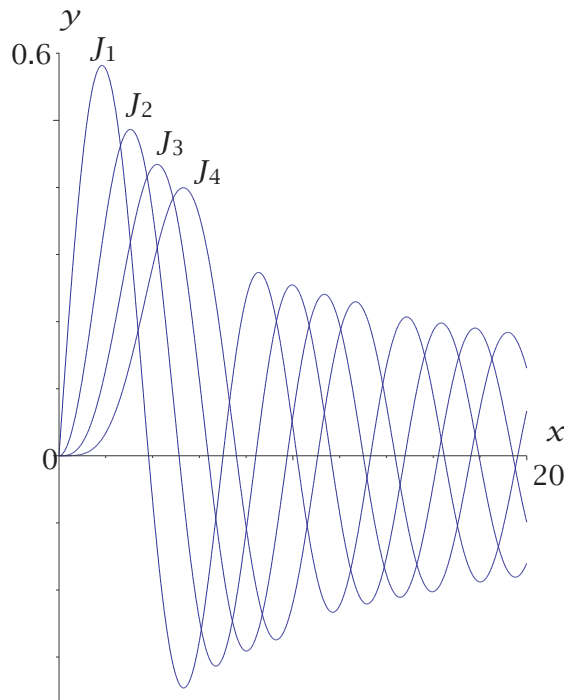
$$\exists \lim_{x \rightarrow 0} u(x), \lim_{x \rightarrow 0} \left( x \frac{d u}{d x}(x) \right) = 0,$$

si  $c_2 = 0$ .<sup>12</sup> Finalmente, imponemos la condición de contorno  $u(b) = 0$ , obteniendo la siguiente condición para los autovalores  $\lambda_n$

$$J_0(\sqrt{\lambda}b) = 0.$$

De nuevo,  $\{J_0(\lambda_n x/b)\}$  es una base ortogonal en  $L^2_x((0, b])$ .

Las primeras funciones de Bessel tienen el siguiente aspecto



## 2.6. Operadores de Sturm-Liouville en varias dimensiones

La clase de operadores de Sturm-Liouville puede extenderse a varias dimensiones y contiene varios ejemplos de gran relevancia por sus aplicaciones físicas. Estos operadores serán estudiados en capítulos posteriores mediante la técnica de *separación de*

<sup>12</sup>Para ver que  $J_0$  las cumple basta con utilizar que  $J_0(0) = 1$  y que

$$\frac{d J_0}{d x} = -J_1(x),$$

por lo que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( x \frac{d J_0}{d x}(x) \right) = -\lim_{x \rightarrow 0} (x J_1(x)) = 0.$$

variables que nos permitirá reducir su análisis al de los operadores de Sturm–Liouville en una dimensión.

**DEFINICIÓN 2.6.1.** Sea  $\Omega$  un subconjunto abierto conexo de  $\mathbb{R}^n$ , ( $n > 1$ ). Un operador es del tipo de Sturm–Liouville si es de la forma

$$Lu = \frac{1}{\rho} \left[ -\nabla \cdot (p \nabla u) + qu \right],$$

siendo  $\rho, p, q$  funciones diferenciables con valores reales y  $\rho, p \neq 0$  en  $\Omega$ .

Para determinar dominios de simetría de estos operadores el espacio apropiado es  $L^2_\rho(\overline{\Omega})$ . Obsérvese por ejemplo que si  $\Omega$  es acotado en  $\mathbb{R}^3$  y  $\rho, p, q$  son funciones diferenciables en  $\overline{\Omega}$ , entonces usando la expresión del producto escalar en  $L^2_\rho(\overline{\Omega})$  y aplicando el teorema de la divergencia, obtenemos la identidad

operadores de  
Sturm–Liouville  
en varias dimen-  
siones

$$\begin{aligned} (Lu, v) - (u, Lv) &= \int_{\Omega} \left[ \bar{u}(x) \left( \nabla \cdot (p(x) \nabla v(x)) \right) - \left( \nabla \cdot (p(x) \nabla \bar{u}(x)) \right) v(x) \right] d^3 x \\ &= - \int_{\Omega} \nabla \cdot \left[ p(x) \left( (\nabla \bar{u}) v - \bar{u} (\nabla v) \right) \right] d^3 x \\ &= - \int_{S(\Omega)} \left[ p(x) \left( (\nabla \bar{u}) v - \bar{u} (\nabla v) \right) \right] \cdot d\mathbf{S} \\ &= - \int_{S(\Omega)} \left[ p(x) \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \mathbf{n}} v - \bar{u} \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \right) \right] dS. \end{aligned}$$

Por lo tanto podemos enunciar

**Teorema 2.6.2.** Suponiendo que  $\Omega$  es un dominio acotado en  $\mathbb{R}^3$  y que  $\rho, p, q$  son funciones diferenciables en  $\overline{\Omega}$ . El operador de Sturm–Liouville  $L$  es simétrico sobre un dominio  $\mathcal{D}$  en  $L^2_\rho(\overline{\Omega})$  si y sólo si  $\forall u, v \in \mathcal{D}$  se verifica

$$\int_{S(\Omega)} \left[ p(x) \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \mathbf{n}} v - \bar{u} \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \right) \right] dS = 0. \quad (2.11)$$

Como consecuencia inmediata determinamos los siguientes dominios sobre los que el operador de Sturm–Liouville es simétrico

### i) Condiciones de Dirichlet homogénea

$$\mathcal{D} := \left\{ u \in C^\infty(\overline{\Omega}) : u|_{S(\Omega)} = 0 \right\}.$$

### ii) Condiciones de Neumann homogénea

$$\mathcal{D} := \left\{ u \in C^\infty(\overline{\Omega}) : \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S(\Omega)} = 0 \right\}.$$

Ejemplos relevantes de operadores de Sturm–Liouville en tres dimensiones son los siguientes

- i) **Laplaciano** Si tomamos  $\rho(x) = p(x) \equiv 1$  obtenemos el operador Laplaciano con signo negativo

$$L = -\Delta$$

- ii) **Hamiltoniano de Schrödinger** Si hacemos  $\rho = 1$  y  $p = \frac{\hbar^2}{2m}$  el operador correspondiente es el operador Hamiltoniano de Schrödinger en mecánica cuántica para una partícula en un campo de fuerzas

$$Lu = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta u + q(x, y, z)u,$$

## 2.7. Series de Fourier

Vamos a abordar ahora el estudio de las series trigonométricas de Fourier, una de las herramientas matemáticas más importantes en el análisis de fenómenos físicos. Introduciremos las series de Fourier en términos de desarrollos en autofunciones de operadores diferenciales simétricos.

### 2.7.1. Bases trigonométricas de Fourier

Consideraremos ahora problemas de autovalores asociados a dos operadores diferenciales particularmente simples. Los correspondientes desarrollos en autofunciones constituyen las llamadas series trigonométricas de Fourier.

- 1) Sea el operador<sup>13</sup>

$$L = -i \frac{d}{dx}.$$

Un dominio en el que es simétrico es el de las funciones diferenciables  $u$  en un intervalo acotado  $[a, b]$  tales que  $u(a) = u(b)$ , esto es: funciones que satisfacen condiciones periódicas.

El problema de autovalores

$$\begin{cases} -i \frac{d}{dx} u = \lambda u, \\ u(a) = u(b), \end{cases}$$

tiene como solución a

$$u(x) = ce^{i\lambda x}$$

satisfaciéndose la condición de frontera si y sólo si

$$e^{i\lambda(b-a)} = 1.$$

Esta condición determina los posibles elementos del espectro

$$\lambda_n = n\omega, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \omega := \frac{2\pi}{b-a}$$

<sup>13</sup>Que en Mecánica Cuántica es el operador momento lineal.

con las autofunciones asociadas siguientes

$$u_n(x) = e^{in\omega x}.$$

2) El segundo operador que consideramos es

$$L = -\frac{d^2}{dx^2}.$$

Estudiaremos dominios asociados a tres tipos de condiciones de frontera

• **Periódicas** El problema de autovalores es

$$\begin{cases} -\frac{d^2 u}{dx^2} = \lambda u, \\ u(a) = u(b), \\ \frac{du}{dx}(a) = \frac{du}{dx}(b). \end{cases}$$

Cuando  $\lambda \neq 0$  tiene como solución

$$u(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda}x + c_2 \sin \sqrt{\lambda}x$$

verificándose las condiciones en la frontera si y sólo si se satisface el siguiente sistema lineal homogéneo para  $(c_1, c_2)$

$$\begin{aligned} [\cos \sqrt{\lambda}a - \cos \sqrt{\lambda}b]c_1 + [\sin \sqrt{\lambda}a - \sin \sqrt{\lambda}b]c_2 &= 0, \\ [\sin \sqrt{\lambda}a - \sin \sqrt{\lambda}b]c_1 - [\cos \sqrt{\lambda}a - \cos \sqrt{\lambda}b]c_2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Soluciones no triviales  $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$  de este sistema existen si y sólo si la matriz de coeficientes tiene determinante cero

$$\begin{vmatrix} \cos \sqrt{\lambda}a - \cos \sqrt{\lambda}b & \sin \sqrt{\lambda}a - \sin \sqrt{\lambda}b \\ -\sin \sqrt{\lambda}a + \sin \sqrt{\lambda}b & \cos \sqrt{\lambda}a - \cos \sqrt{\lambda}b \end{vmatrix} = 0$$

esto es

$$[\cos \sqrt{\lambda}a - \cos \sqrt{\lambda}b]^2 + [\sin \sqrt{\lambda}a - \sin \sqrt{\lambda}b]^2 = 0.$$

Desarrollando los cuadrados y utilizando las fórmulas trigonométricas se obtiene

$$1 - \cos \sqrt{\lambda}(b - a) = 0$$

y por ello los autovalores no nulos son

$$\lambda_n = \omega^2 n^2, \quad n = 1, 2, \dots \quad \omega := \frac{2\pi}{b - a}.$$

Estos autovalores no son simples (obsérvese que es un problema de Sturm-Liouville con condiciones de contorno periódicas), ya que para cualquiera de ellos el sistema lineal homogéneo (2.12) se reduce a un sistema en que la matriz de coeficientes es la matriz cero; por tanto, admite como soluciones todos los valores de  $(c_1, c_2)$ . De esta forma

$$\mathcal{D}_{\lambda_n} = \mathbb{C}\{\sin n\omega x, \cos n\omega x\}.$$

Por otro lado,  $\lambda = 0$  también es autovalor y la autofunción correspondiente puede tomarse como 1 (las soluciones de  $-u'' = 0$  son  $u(x) = c_1 + c_2x$ , pero las condiciones de contorno imponen  $c_2 = 0$ ). Por tanto, el conjunto de autovalores es

$$\lambda_n = \omega^2 n^2, \quad n = 0, 1, \dots, \quad \omega := \frac{2\pi}{b-a}.$$

El conjunto de autofunciones

$$\{1, \cos n\omega x, \sin n\omega x\}_{n=1}^{\infty}.$$

constituye un conjunto ortogonal completo en  $L^2([a, b])$ .

• **Dirichlet homogéneas** El problema de autovalores ahora es

$$\begin{cases} -\frac{d^2 u}{dx^2} = \lambda u, \\ u(a) = 0, \\ u(b) = 0 \end{cases}$$

El valor  $\lambda = 0$  no está en el espectro ya que si lo estuviera la correspondiente autofunción sería de la forma  $u(x) = c_1 + c_2x$  y las condiciones de contorno implican que  $c_1 + c_2a = c_1 + c_2b = 0$ , y como  $b - a \neq 0$  se tiene  $c_1 = c_2 = 0$ . Las soluciones a la ecuación diferencial para  $\lambda \neq 0$  tienen la forma

$$u(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda}x + c_2 \sin \sqrt{\lambda}x,$$

y las condiciones de contorno se satisfacen si y solo si

$$\begin{aligned} c_1 \cos \sqrt{\lambda}a + c_2 \sin \sqrt{\lambda}a &= 0, \\ c_1 \cos \sqrt{\lambda}b + c_2 \sin \sqrt{\lambda}b &= 0. \end{aligned}$$

Existirán soluciones no triviales  $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$  si y sólo si

$$\begin{vmatrix} \cos \sqrt{\lambda}a & \sin \sqrt{\lambda}a \\ \cos \sqrt{\lambda}b & \sin \sqrt{\lambda}b \end{vmatrix} = 0,$$

esto es

$$\sin(\sqrt{\lambda}(b-a)) = 0.$$

Así pues, los autovalores son

$$\lambda_n = \frac{\omega^2}{4}n^2, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \omega := \frac{2\pi}{b-a},$$

y las correspondientes autofunciones resultan ser

$$\begin{aligned} u_n(x) &= -\sin n\frac{\omega}{2}a \cos n\frac{\omega}{2}x + \cos n\frac{\omega}{2}a \sin n\frac{\omega}{2}x \\ &= \sin n\frac{\omega}{2}(x-a). \end{aligned}$$

• **Neumann homogéneas** Ahora tenemos

$$\begin{cases} -\frac{d^2 u}{dx^2} = \lambda u, \\ \frac{du}{dx}(a) = 0, \\ \frac{du}{dx}(b) = 0. \end{cases}$$

En este caso  $\lambda = 0$  está en el espectro: la solución es  $u(x) = c_1 + c_2 x$ , las condiciones de frontera implican  $c_2 = 0$  y la correspondiente autofunción es  $u_0(x) = 1$ . Cuando  $\lambda \neq 0$  las soluciones tienen la forma

$$u(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda} x + c_2 \sin \sqrt{\lambda} x$$

satisfaciéndose las condiciones de contorno si y solo si

$$\begin{aligned} -c_1 \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a + c_2 \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} a &= 0, \\ -c_1 \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} b + c_2 \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} b &= 0. \end{aligned}$$

Existen soluciones no triviales  $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$  si sólo si

$$\sqrt{\lambda} \begin{vmatrix} -\sin \sqrt{\lambda} a & \cos \sqrt{\lambda} a \\ -\sin \sqrt{\lambda} b & \cos \sqrt{\lambda} b \end{vmatrix} = 0$$

esto es

$$\sin(\sqrt{\lambda}(b-a)) = 0.$$

Así pues, los autovalores son

$$\lambda_n = \frac{\omega^2}{4} n^2, \quad n = 0, 1, \dots \quad \omega := \frac{2\pi}{b-a}.$$

Las autofunciones son

$$\begin{aligned} u_n(x) &= \cos n \frac{\omega}{2} a \cos n \frac{\omega}{2} x + \sin n \frac{\omega}{2} a \sin n \frac{\omega}{2} x \\ &= \cos n \frac{\omega}{2} (x - a). \end{aligned}$$

## 2.7.2. Desarrollos de Fourier

Los desarrollos en autofunciones inducidos por los operadores diferenciales simétricos vistos en la anterior sub-sección constituyen los denominados desarrollos en series trigonométricas de Fourier. A continuación estudiamos sus propiedades usando (2.1) y el teorema 2.5.3.

1) El operador  $L = -i \frac{d}{dx}$  es simétrico sobre el dominio  $\mathcal{D}$  de funciones diferenciables  $u = u(x)$  en el intervalo  $[a, b]$  tales que  $u(a) = u(b)$ . Por tanto:

• **series de exponenciales**

Toda función  $u \in L^2([a, b])$  puede desarrollarse en la forma

$$u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega x}, \quad \omega := \frac{2\pi}{b-a},$$

con

$$c_n = \frac{1}{b-a} \int_a^b e^{-in\omega x} u(x) dx.$$

En general la serie converge en media a la función  $u$ , sin embargo si  $u \in \mathcal{D}$  la serie converge uniformemente.

Obsérvese que en el anterior cálculo de los coeficientes  $c_n$  se ha tenido en cuenta que  $\|u_n\|^2 = \int_a^b dx = b-a$ .

2) El operador  $L = -\frac{d^2}{dx^2}$  es del tipo Sturm-Liouville regular y simétrico siempre que  $[a, b]$  sea un intervalo finito y se den cualesquiera de las tres condiciones de contorno estudiadas: periódicas, Dirichlet y Neumann. Por ello, los conjuntos asociados de autofunciones son bases ortogonales en  $L^2([a, b])$ . Así todas las series que vamos a tratar convergen en media a la función  $u \in L^2([a, b])$  que desarrollan, y si además ésta pertenece al correspondiente dominio  $\mathcal{D}$  convergen uniformemente.

• series de senos y cosenos (condiciones periódicas)

Toda función  $u \in L^2([a, b])$  se puede desarrollar en la forma

$$u = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x), \quad \omega := \frac{2\pi}{b-a}$$

donde los coeficientes se determinan mediante las denominadas **fórmulas de Euler**

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{b-a} \int_a^b \cos n\omega x u(x) dx, \quad n \geq 0 \\ b_n &= \frac{2}{b-a} \int_a^b \sin n\omega x u(x) dx, \quad n \geq 1. \end{aligned} \tag{2.13}$$

La base de autofunciones usada es

$$\left\{ u_0 = \frac{1}{2}, u_n = \cos n\omega x, v_n = \sin n\omega x \right\}_{n=1}^{\infty}$$

y se ha tenido en cuenta que

$$\begin{aligned} \|u_0\|^2 &= \frac{1}{4} \int_a^b dx = \frac{b-a}{4}, \\ \|u_n\|^2 &= \int_a^b \cos^2 n\omega x dx = \frac{1}{2} \int_a^b (1 + \cos 2n\omega x) dx = \frac{b-a}{2}, \\ \|v_n\|^2 &= \int_a^b \sin^2 n\omega x dx = \int_a^b (1 - \cos^2 n\omega x) dx = \frac{b-a}{2}. \end{aligned}$$



Es claro que existe una relación estrecha entre las series de Fourier de exponenciales y las de senos y cosenos. Podemos pasar de una a otra simplemente utilizando las fórmulas

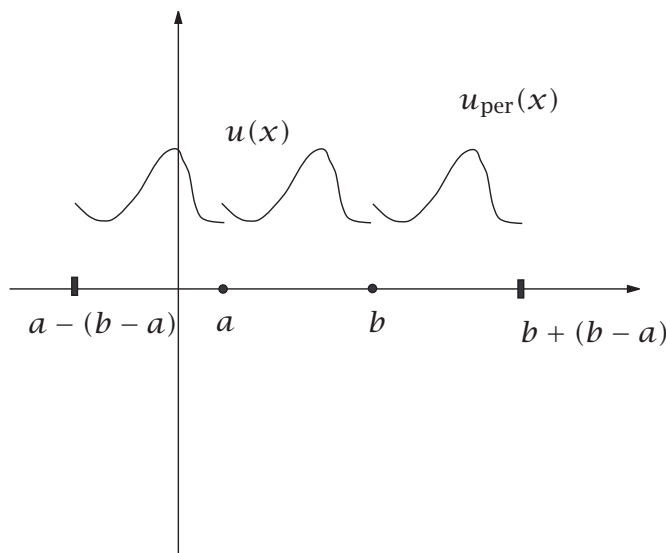
$$e^{in\omega x} = \cos n\omega x + i \operatorname{sen} n\omega x,$$

$$\cos n\omega x = \frac{1}{2}(e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}), \quad \operatorname{sen} n\omega x = \frac{1}{2i}(e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}).$$

Aunque la función  $u$  está en principio definida solo sobre el intervalo  $[a, b]$ , los dos tipos de desarrollos de Fourier que acabamos de ver proporcionan series de funciones periódicas con periodo  $(b - a)$ . Luego las funciones suma de las series pueden extenderse a funciones periódicas del mismo periodo sobre la recta. Por tanto tales extensiones desarrollan la extensión periódica de  $u$  definida como sigue. Dado  $x \in \mathbb{R}$ , existe un único entero  $m \in \mathbb{Z}$  tal que  $x \in [a + m(b - a), b + m(b - a)]$ . La extensión periódica se define como

$$u_{\text{per}}(x) := u(x - m(b - a)).$$

Esto es, la gráfica de  $u_{\text{per}}(x)$  se construye simplemente pegando copias, una tras otra, de la de  $u$  sobre  $[a, b]$ . Los desarrollos en series de exponenciales o de cosenos y senos se pueden aplicar a  $u$  o a su correspondiente extensión periódica.



• series de senos (condiciones de Dirichlet homogéneas)

Toda  $u \in L^2([a, b])$  puede desarrollarse como

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\omega}{2}(x - a), \quad \omega := \frac{2\pi}{b - a}$$

con

$$b_n = \frac{2}{b - a} \int_a^b \operatorname{sen} \frac{n\omega}{2}(x - a) u(x) \, dx, \quad n \geq 1.$$

La base ortogonal de autofunciones usada es

$$\left\{ v_n = \sin \frac{n\omega}{2}(x-a) \right\}_{n \geq 1}$$

cuyas normas al cuadrado son

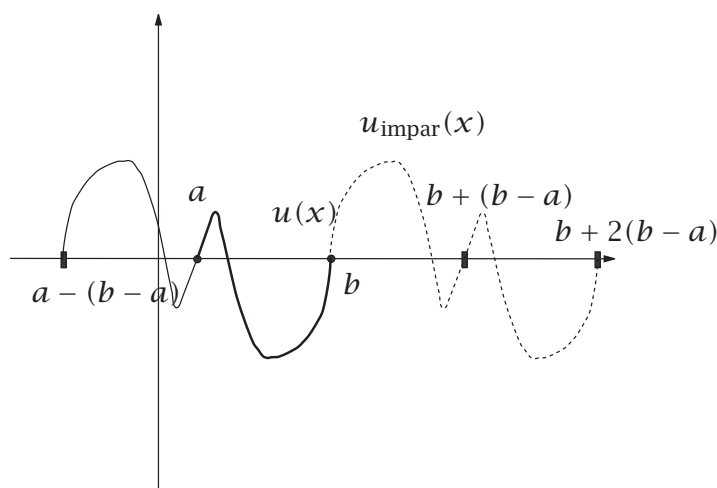
$$\|v_n\|^2 = \int_a^b \sin^2 \frac{n\omega}{2}(x-a) dx = \int_a^b \frac{1}{2} \left( 1 - \cos n \frac{2\pi}{b-a}(x-a) \right) dx = \frac{b-a}{2}.$$

Podemos extender la función suma de la serie de senos a toda la recta. El resultado es un desarrollo para la denominada extensión impar de la función  $u$ . La extensión impar de  $u$  a toda la recta se determina en dos etapas: primero se extiende al intervalo  $[a-(b-a), b] = [2a-b, a] \cup [a, b]$  de forma impar, esto es, si  $x \in [a, b]$  definimos

$$u_{\text{impar}}(a - (x-a)) = -u(x),$$

extensión impar

y después se realiza una extensión periódica desde el intervalo  $[2a-b, a]$  a toda la recta.



• series de cosenos (condiciones de Neumann homogéneas)

Toda  $u \in L^2([a, b])$  puede desarrollarse como

$$u = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n \frac{\omega}{2}(x-a), \quad \omega := \frac{2\pi}{b-a}$$

donde

$$a_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b \cos n \frac{\omega}{2}(x-a) u(x) dx, \quad n \geq 0.$$

La base de autofunciones usada es

$$\left\{ u_0 = \frac{1}{2}, u_n = \cos \left( n \frac{\omega}{2}(x-a) \right) \right\}_{n \geq 1}$$

con normas al cuadrado

$$\|u_0\|^2 = \frac{1}{4} \int_a^b dx = \frac{b-a}{4},$$

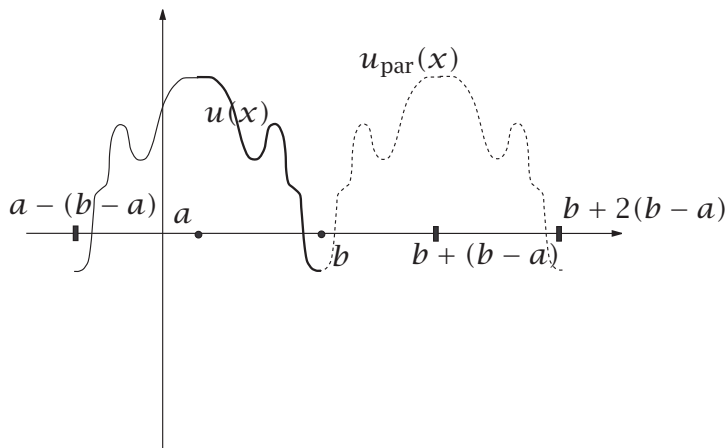
$$\|u_n\|^2 = \int_a^b \cos^2 n \frac{\omega}{2} (x-a) dx = \frac{1}{2} \int_a^b \left(1 + \cos n \frac{2\pi}{b-a} (x-a)\right) dx = \frac{b-a}{2}.$$

La función suma de la serie de cosenos puede extenderse también a toda la recta. La función resultante es el desarrollo de la extensión par de  $u$  definida en la forma siguiente: extendemos la función  $u$  al intervalo  $[a - (b-a), b] = [2a-b, a] \cup [a, b]$  de forma par, esto es, si  $x \in [a, b]$  definimos

$$u_{\text{par}}(a - (x-a)) = u(x),$$

y después se realiza la extensión periódica desde  $[2a-b, b]$  a toda la recta.

extensión par



**Ejemplos** Consideremos la función  $u(x) = e^x$  en el intervalo  $[0, 1]$ . Vamos a analizar los tres diferentes desarrollos trigonométricos de Fourier. En primer lugar consideramos el desarrollo en serie de senos y cosenos y su extensión periódica. Después analizamos los desarrollos en sólo cosenos y en sólo senos y sus extensiones par e impar respectivamente.

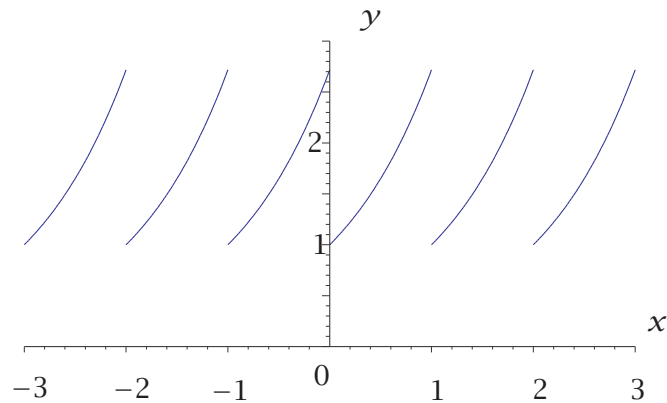
- La serie de Fourier de cosenos y senos

$$e^x = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} [a_n \cos 2\pi n x + b_n \sin 2\pi n x]$$

tiene por coeficientes

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \int_0^1 e^x \cos 2\pi n x dx = 2 \operatorname{Re} \left[ \int_0^1 e^x e^{2i\pi n x} dx \right] = 2 \operatorname{Re} \left[ \int_0^1 e^{(1+2i\pi n)x} dx \right] \\ &= 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{(1+2i\pi n)x}}{1+2i\pi n} \right]_0^1 \\ &= \frac{2[e-1]}{1+4\pi^2 n^2}, \\ b_n &= 2 \int_0^1 e^x \sin 2\pi n x dx = 2 \operatorname{Im} \left[ \int_0^1 e^x e^{2i\pi n x} dx \right] = 2 \operatorname{Im} \left[ \frac{e^{(1+2i\pi n)x}}{1+2i\pi n} \right]_0^1 \\ &= -2\pi n a_n \end{aligned}$$

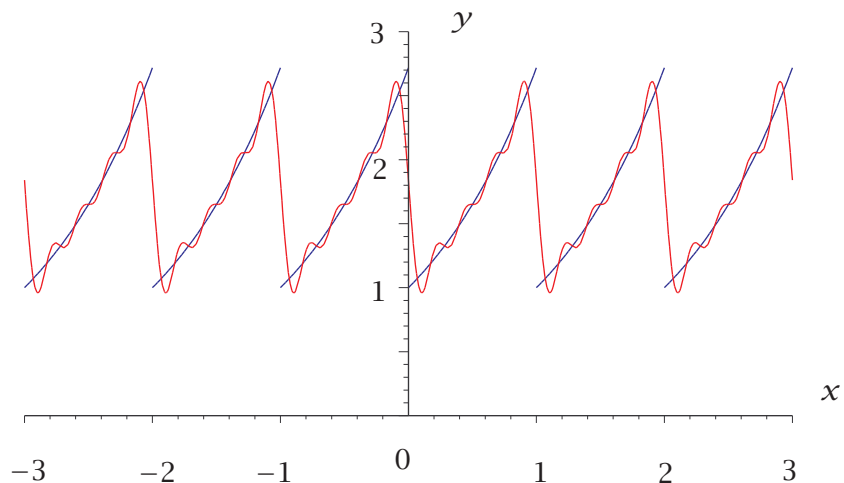
La extensión periódica de  $e^x$  tiene como gráfica



y los primeros términos de su desarrollo en senos y cosenos son

$$\begin{aligned}
 [e^x]_{\text{periodica}} \sim 2(e-1) & \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{1+4\pi^2} \cos 2\pi x + \frac{1}{1+16\pi^2} \cos 4\pi x \right. \\
 & \left. + \frac{1}{1+36\pi^2} \cos 6\pi x + \frac{1}{1+64\pi^2} \cos 8\pi x + \dots \right] \\
 & - 4\pi(e-1) \left[ \frac{1}{1+4\pi^2} \sin 2\pi x + \frac{2}{1+16\pi^2} \sin 4\pi x \right. \\
 & \left. + \frac{3}{1+36\pi^2} \sin 6\pi x + \frac{4}{1+64\pi^2} \sin 8\pi x + \dots \right].
 \end{aligned}$$

Representamos a continuación la gráfica de la extensión periódica de la exponencial y la de su serie trigonométrica de Fourier truncada a  $n = 4$  (la línea oscilante).



Se observa que en las discontinuidades de la función la serie tiende al valor medio de los valores a la izquierda y a la derecha de la función dada. Además vemos

que cerca de estas discontinuidades la serie truncada oscila, la presencia de estas oscilaciones es el llamado fenómeno de Gibbs, y permanece aunque tomemos más términos en la serie.

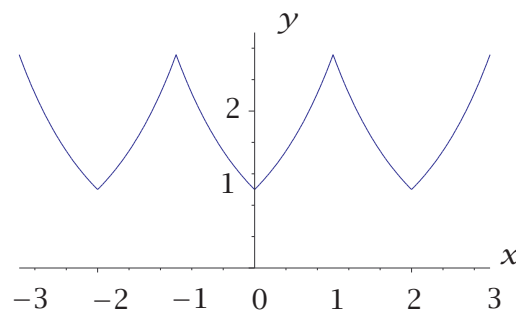
- Consideramos ahora las serie de sólo cosenos y de sólo senos,

$$e^x = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos \pi n x, \quad e^x = \sum_{n \geq 1} b_n \operatorname{sen} \pi n x.$$

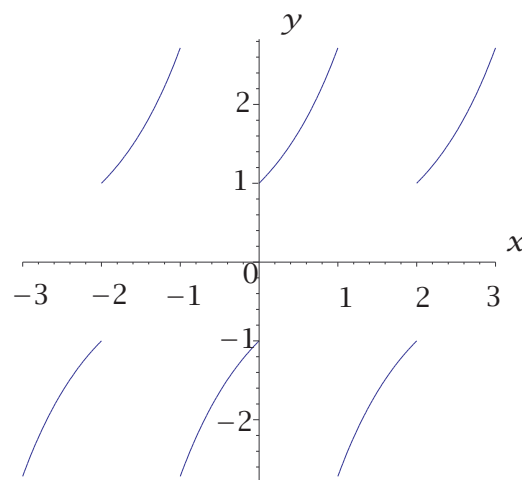
Se verifica que

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \int_0^1 e^x \cos \pi n x \, dx = 2 \operatorname{Re} \left[ \int_0^1 e^x e^{i \pi n x} \, dx \right] = 2 \operatorname{Re} \left[ \int_0^1 e^{(1+i \pi n)x} \, dx \right] \\ &= 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{(1+i \pi n)x}}{1+i \pi n} \right]_0^1 \\ &= \frac{2[(-1)^n e - 1]}{1 + \pi^2 n^2}, \\ b_n &= 2 \int_0^1 e^x \operatorname{sen} \pi n x \, dx = 2 \operatorname{Im} \left[ \int_0^1 e^x e^{i \pi n x} \, dx \right] = 2 \operatorname{Im} \left[ \frac{e^{(1+i \pi n)x}}{1+i \pi n} \right]_0^1 \\ &= -n \pi a_n \end{aligned}$$

La extensión par  $[e^x]_{\text{par}}$  tiene por gráfica



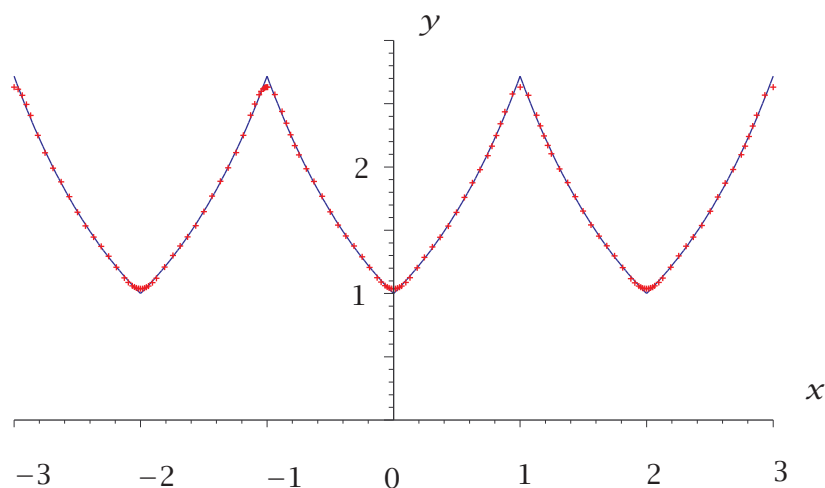
en tanto que la extensión impar  $[e^x]_{\text{impar}}$  se representa como



Las respectivas series son

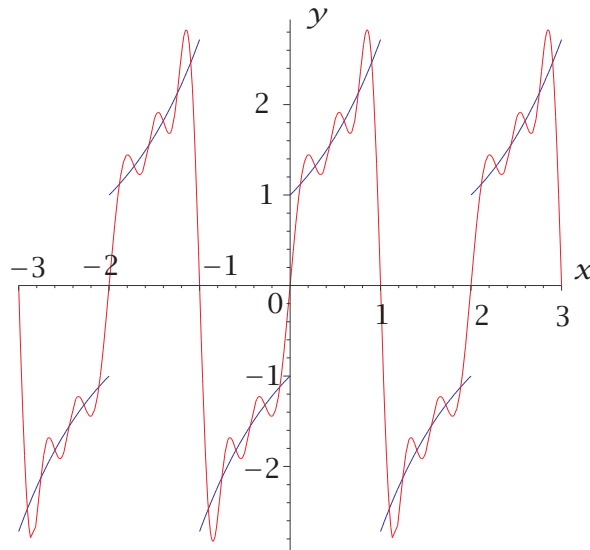
$$\begin{aligned}
 [e^x]_{\text{par}} &\sim e - 1 + 2 \left[ -\frac{e+1}{1+\pi^2} \cos \pi x + \frac{e-1}{1+4\pi^2} \cos 2\pi x \right. \\
 &\quad \left. - \frac{e+1}{1+9\pi^2} \cos 3\pi x + \frac{e-1}{1+16\pi^2} \cos 4\pi x + \dots \right], \\
 [e^x]_{\text{impar}} &\sim 2\pi \left[ \frac{e+1}{1+\pi^2} \operatorname{sen} \pi x - 2 \frac{e-1}{1+4\pi^2} \operatorname{sen} 2\pi x \right. \\
 &\quad \left. + 3 \frac{e+1}{1+9\pi^2} \operatorname{sen} 3\pi x - 4 \frac{e-1}{1+16\pi^2} \operatorname{sen} 4\pi x + \dots \right]
 \end{aligned}$$

A continuación mostramos las gráficas de las funciones extendidas —de forma par e impar— y sus series —en cosenos y senos— truncadas en  $n = 6$ . Para  $[e^x]_{\text{par}}$  tenemos



en ella se marca con cruces la serie de Fourier en cosenos truncada a  $n = 6$  y en línea continua la función  $e^x$  extendida de forma par. Observamos por un lado que es una buena aproximación y por otro que en los puntos  $x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  la tangente a la serie truncada tiene pendiente nula, esto es la derivada se anula (como debe ser ya que la derivada sólo tiene senos que se anulan en estos puntos) a diferencia de la función original en la que la derivada salta de  $-1$  a  $1$ .<sup>14</sup> En tanto que para  $[e^x]_{\text{impar}}$  tenemos

<sup>14</sup>Si  $u$  es una función derivable en  $[a, b]$  salvo por un conjunto discreto de puntos podemos asegurar la convergencia uniforme.



La línea oscilante representa la serie de Fourier de senos truncada a sexto orden. Debemos notar que en los puntos conflictivos  $0, \pm 1, \pm 2, \dots$  la discrepancia entre función y serie truncada es notable. Por ejemplo, en  $x = 0$  la función original tiene un salto discontinuo de 2 unidades en tanto que la serie se anula, como debe ser. Estos fenómenos son debidos a que la función elegida no cumple los requisitos de contorno, aunque sin embargo en el interior la serie de Fourier converge a la extensión dada.

### 2.7.3. Convergencia de series de Fourier

Tratamos ahora el problema de la convergencia de las series de Fourier de una función  $u(x)$ . Como ya sabemos *para cualquier función  $u \in L^2([a, b])$  sus series de Fourier en exponenciales, en senos y cosenos, en sólo senos y en sólo cosenos convergen en media*. Más aún, si la función es diferenciable y satisface la condiciones de contorno adecuadas (periódicas, Dirichlet homogéneas o Neumann homogéneas) las correspondientes series convergen uniformemente (y por tanto también puntualmente) a la función  $u$ . Una cuestión fundamental es saber cuándo las series de una función general  $u \in L^2([a, b])$  convergen puntualmente y cuál es la relación entre la función límite y la función  $u$ . Una clase de funciones para la que podemos dar respuestas muy precisas a estas cuestiones es la siguiente

convergencia en  
media

**DEFINICIÓN 2.7.1.** Una función  $u = u(x)$  es  $C^1$  a trozos en un intervalo  $[a, b]$  cuando existe una partición  $a = c_1 < c_2 < \dots < c_M = b$  de  $[a, b]$  tal que  $\forall i = 1, \dots, M - 1$ , tanto  $u$  como su derivada primera  $u'$  son continuas en los subintervalos  $(c_i, c_{i+1})$  y tienen límites laterales finitos en los extremos  $c_i$  y  $c_{i+1}$ .

Por ejemplo, analizar la convergencia puntual de la serie de senos y cosenos de una función  $u \in L^2([a, b])$  consiste en averiguar para que puntos  $x \in \mathbb{R}$  existe el límite

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(u, x),$$

donde  $S_N(u, x)$  denota la suma parcial  $N$ -ésima de la serie de senos y cosenos

$$S_N(u, x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N [a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x].$$

y determinar su relación con el valor de  $u$  en  $x$ . Una respuesta de gran interés práctico es el siguiente teorema

convergencia  
puntual

**Teorema 2.7.2 (Dirichlet (1829)).** Si  $u(x)$  es una función  $C^1$  a trozos en  $[a, b]$  entonces sus series de Fourier convergen puntualmente en todo punto  $x \in \mathbb{R}$  y su límite es igual a

$$\frac{u_{\text{ext}}(x + 0^+) + u_{\text{ext}}(x + 0^-)}{2},$$

donde  $u_{\text{ext}}$  denota la correspondiente extensión (periódica, par o impar) de  $u$  a todo  $\mathbb{R}$  y

$$u_{\text{ext}}(x + 0^\pm) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_{\text{ext}}(x \pm |\varepsilon|).$$

Este resultado resuelve completamente el problema de la convergencia puntual de las series de Fourier para la clase de funciones del enunciado. Básicamente sólo necesitamos conocer la extensión a  $\mathbb{R}$  de la función  $u = u(x)$  y aplicar las siguientes consecuencias del teorema de Dirichlet

- 1) Si  $x$  es un punto de continuidad de  $u_{\text{ext}}$  entonces ambos límites  $u_{\text{ext}}(x + 0^\pm)$  coinciden con  $u_{\text{ext}}(x)$ , así que la serie de Fourier correspondiente converge puntualmente a  $u_{\text{ext}}$ .
- 2) Si  $x$  es un punto de discontinuidad de  $u_{\text{ext}}$  los dos límites  $u_{\text{ext}}(x + 0^\pm)$  son diferentes y constituyen dos *candidatos* igualmente atractivos para el límite puntual de la serie de Fourier. La serie toma en este caso una decisión *salomónica* y decide converger puntualmente a la semisuma de estos dos límites.



**Ejemplo** Sea la función

$$u(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & 0 \leq x \leq \pi, \\ -\frac{\pi}{4}, & -\pi \leq x < 0. \end{cases}$$

Consideremos su correspondiente desarrollo de Fourier en exponenciales. Teniendo en cuenta que en este caso  $b - a = 2\pi$ ,  $\omega = 1$

$$u(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(x) e^{-inx} dx = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es par,} \\ \frac{1}{2in}, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Por tanto

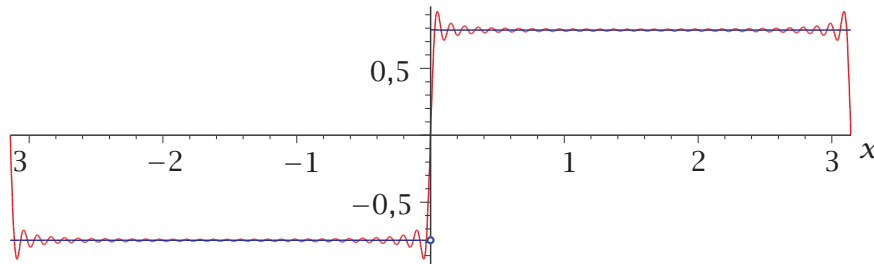
$$u(x) = \frac{1}{2i} [e^{ix} + \frac{1}{3}e^{i3x} + \dots] + \frac{1}{2i} [-e^{-ix} - \frac{1}{3}e^{-i3x} - \dots],$$



que agrupando términos queda en la forma

$$u(x) = \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}.$$

Esta es la serie de Fourier de senos y cosenos de  $v$  en el intervalo  $[-\pi, \pi]$  (los términos en los cosenos tienen coeficiente cero). La gráfica de la función y de la suma parcial de la serie de Fourier para  $N = 40$  son



La función  $u$  es  $C^1$  a trozos en  $[-\pi, \pi]$  así que su serie de Fourier debe verificar las propiedades que asegura el teorema de Dirichlet. Podemos comprobar directamente algunas de tales propiedades. Tomemos los puntos  $x = 0, \pm\pi$ . En ellos todos los senos de la serie se anulan, luego la suma de la serie converge puntualmente en  $x = 0, \pm\pi$  al valor cero, que es precisamente el valor que toma la extensión periódica

$$\frac{u_{\text{ext}}(x + 0^+) + u_{\text{ext}}(x + 0^-)}{2},$$

en tales puntos.

Observemos que la convergencia puntual para  $x = \frac{\pi}{2}$  implica

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

El análisis de la convergencia puntual de las series de Fourier para clases más generales de funciones es un problema de enorme interés y altamente no trivial.

- 1) Puede suceder que una función  $u$  sea continua en un punto  $x$ , y que su serie de Fourier no sea convergente en  $x$  (Du Bois Reymond, 1873). (Halló una función  $u$  con  $\limsup_{N \rightarrow \infty} S_N(u, 0) = \infty$ .)
- 2) En 1923, Kolmogorov halló una función  $u$  integrable en el sentido de Lebesgue (y no de Riemann) cuya serie de Fourier no converge en ningún  $x$  de  $[a, b]$ .
- 3) En 1915 Luzin conjeturó y en 1966 Carleson demostró que **las funciones de cuadrado integrable poseen series de Fourier convergentes en casi todos los puntos**.

teorema de Carleson

Otro aspecto interesante de la convergencia de las series de Fourier es el llamado fenómeno de Gibbs. El físico Michelson construyó un aparato para computar las series de Fourier. La máquina fue probada calculando los 80 primeros coeficientes de Fourier de la función

fenómeno de Gibbs

$$u = \begin{cases} x & x \in [-\pi, \pi], \\ 0 & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

Para sorpresa de Michelson la serie truncada mostraba dos pequeños resaltes en  $x = \pm\pi$ , los puntos de discontinuidad; de hecho, a medida que  $N$  crece estas dos perturbaciones sobre el resultado exacto se aproximan a las discontinuidades, aunque no decrecen en valor, siendo éste el 19% de los resultados exactos:  $\pm\pi$  y suponiendo  $\simeq 8,5\%, 9\%$  del salto total de la función ( $2\pi$ ). Gibbs, en dos artículos a *Nature* dio la explicación a este hecho, que desde entonces se conoce como fenómeno de Gibbs: vino a decir que *no se deben confundir la gráfica del límite con el límite de las gráficas*. La suma parcial de Fourier es

$$S_N(u, x) = - \sum_{n=1}^N (-1)^n \frac{2}{n} \operatorname{sen} nx.$$

Por ello, uno encuentra que

$$S_N(u; \pi - \pi/N) = \sum_{n=1}^N \frac{2}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{N} \rightarrow 2 \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx \approx 1,17\pi.$$

En donde la evaluación del límite la hemos obtenido considerando la serie como una suma de Riemann.

En el punto  $x = \pi$  tenemos convergencia puntual a 0:

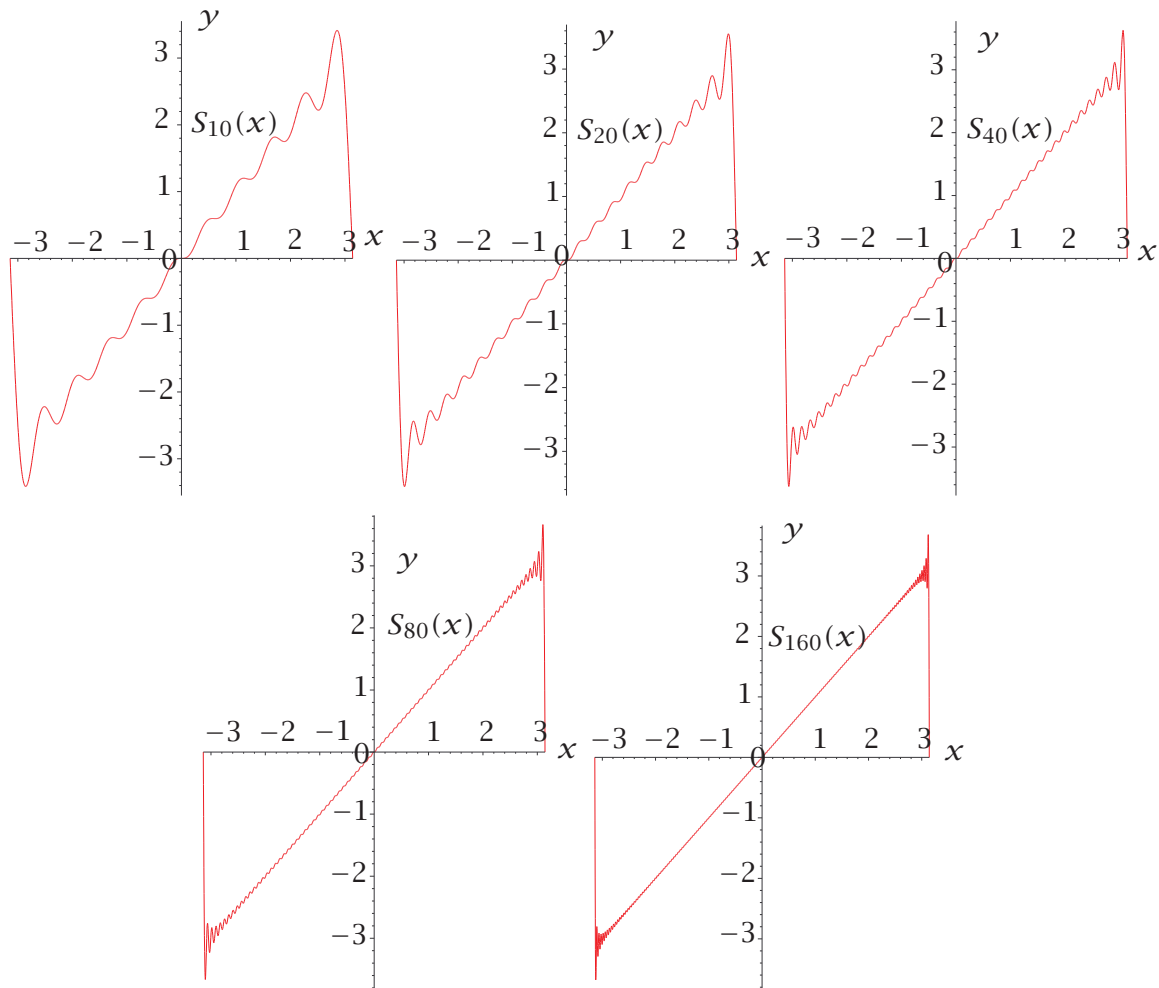
$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(u, \pi) = 0.$$

Por tanto

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(u, \pi) \neq \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(u, \pi(1 - 1/N)),$$

que muestra que la convergencia en  $x = \pi$  no es uniforme. El salto, que no desaparece por muy grande que sea  $N$ , a medida que  $N$  crece se va aproximando a  $x = \pi$ .

A continuación mostramos las gráficas para  $N = 10, 20, 240, 80, 160$  de la serie de Fourier truncada en donde se aprecia claramente el fenómeno de Gibbs.



Por último nos queda por discutir el error al truncar y la velocidad de convergencia de una serie de Fourier. Así, si  $u \in C^r([a, b])$  y la  $r$ -ésima derivada está acotada error

$$\left| \frac{d^r u}{dx^r} \right| \leq K$$

entonces

$$|S_N(u, x) - u(x)| \leq \frac{c_r K \ln N}{N^r}$$

donde  $c_r$  es una constante que tan sólo depende de  $r$ . Vemos que cuantas más derivadas de la función existan más rápida es la convergencia.<sup>15</sup> Si la función  $u(x)$  es analítica en  $[a, b]$  tenemos

$$|S_N(u, x) - u(x)| \leq c q^N$$

$0 < c$  y  $0 < q < 1$  dependen solamente de  $u$ .

<sup>15</sup>De esta cota se infiere la convergencia uniforme.

## 2.8. Transformada de Fourier

### 2.8.1. Definición de la transformada de Fourier

La transformada de Fourier de una función  $u = u(x)$  puede describirse como un desarrollo de  $u$  en autofunciones del operador

$$Lu = -iDu,$$

cuando el dominio de  $L$  es de la forma

$$\mathcal{D} := \{u \in L^2(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R}) : Lu \in L^2(\mathbb{R})\}.$$

Adviértase que la definición de  $\mathcal{D}$  está motivada por el hecho de que al considerar funciones  $u$  definidas sobre toda la recta, no está asegurado que  $u \in L^2(\mathbb{R})$  cuando  $u \in C^\infty(\mathbb{R})$ , por lo que tenemos que exigir que  $u$  pertenezca a ambos espacios. Por otro lado también debemos exigir que  $Lu \in L^2(\mathbb{R})$  para que  $L$  constituya una aplicación  $\mathcal{D} \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ . Lo especial de este dominio es que, a pesar de que  $L$  es simétrico en él, no existen autofunciones de  $L$  en  $\mathcal{D}$ . Esto es claro ya que

$$Lu = \lambda u,$$

implica

$$u = ce^{i\lambda x}, \quad c \neq 0,$$

pero tales funciones no están en  $L^2(\mathbb{R})$  ya que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u|^2 dx = |c|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\operatorname{Im}(\lambda)x} dx = \infty.$$

Sin embargo, vamos a mostrar que un subconjunto de estas autofunciones

$$B := \{e_k(x) := e^{ikx} : k \in \mathbb{R}\},$$

permite desarrollar todas las funciones  $u \in L^2(\mathbb{R})$ . El desarrollo ahora no será una serie, sino una integral. De hecho la base  $B$  de funciones del desarrollo no es un conjunto discreto, ya que posee tantos elementos  $e_k, k \in \mathbb{R}$  como el conjunto de los números reales.

Para introducir este nuevo desarrollo partimos de la serie de Fourier de exponenciales de una función  $u \in L^2([a, b])$

$$u(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{ik_n x}, \quad c_n = \frac{1}{b-a} \int_a^b e^{-ik_n x} u(x) dx,$$

donde

$$k_n := \omega n, \quad \omega := \frac{2\pi}{b-a}.$$

Nuestra idea es escribir esta suma en la forma de suma de Riemann de una integral respecto de la variable  $k$ . En este sentido tenemos que

$$\boxed{u(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c(k_n) e^{ik_n x} \Delta k} \tag{2.14}$$

donde

$$\begin{aligned} \Delta k &:= k_{n+1} - k_n = \omega, \\ c(k_n) &:= \frac{c_n}{\Delta k} = \frac{1}{2\pi} \int_a^b e^{-ik_n x} u(x) dx. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Si realizamos el límite

$$a \rightarrow -\infty, \quad b \rightarrow +\infty,$$

obsérvese que  $\Delta k \rightarrow 0$  y que tenemos

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\mathbb{R}} c(k) e^{ikx} dk, \\ c(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} u(x) dx. \end{aligned}$$

Este es el desarrollo de  $u$  en las autofunciones  $e_k(x)$ . La función  $c = c(k)$  juega el papel de *coeficientes del desarrollo*. Toda la información de la función primitiva  $u = u(x)$  queda codificada en la nueva función  $c = c(k)$ . La nomenclatura y notación usual para este desarrollo son

$$\begin{aligned} c(k) &=: \mathcal{F}(u), \quad \text{transformada de Fourier de } u. \\ u(x) &=: \mathcal{F}^{-1}(c), \quad \text{transformada de Fourier inversa de } c \end{aligned}$$

La transformada de Fourier aparece de este modo como un límite continuo del concepto de desarrollo en serie de Fourier.

transformada de  
Fourier *versus* se-  
ries de Fourier

Consideramos ahora la extensión  $n$ -dimensional de la transformada de Fourier. Denotaremos

$$x = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n, \quad k = (k_0, k_1, \dots, k_{n-1}) \in \mathbb{R}^n,$$

$$x \cdot k = x_0 k_0 + \dots + x_{n-1} k_{n-1}.$$

transformada de  
Fourier en  $\mathbb{R}^n$

La transformación de Fourier para funciones de  $n$  variables se define como sigue

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{ik \cdot x} c(k) d^n k =: \mathcal{F}^{-1}(c), \quad \text{transformada inversa de Fourier de } c \\ c(k) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ik \cdot x} u(x) d^n x =: \mathcal{F}(u), \quad \text{transformada de Fourier de } u. \end{aligned}$$

Un problema básico es saber cuando existe la transformada de Fourier de una función. Algunos resultados importantes son los siguientes

**Teorema 2.8.1.** Si  $u(x)$  es absolutamente integrable, esto es si

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)| d^n x < \infty,$$

entonces su transformada de Fourier  $\mathcal{F}(u)$  existe y es una función continua en todo  $\mathbb{R}^n$ .

Sin embargo el espacio de funciones absolutamente integrables no queda invariante bajo la transformada de Fourier. Es decir, existen funciones absolutamente integrables

cuya transformada de Fourier no es absolutamente integrable. En este sentido el espacio  $L^2(\mathbb{R}^n)$  es más apropiado ya que se verifica

**Teorema 2.8.2.** Si  $u(x)$  es de cuadrado integrable ( $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ), esto es si

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^2 d^n x < \infty,$$

entonces su transformada de Fourier  $\mathcal{F}(u)$  existe y es también una función de cuadrado integrable. Además, la transformada de Fourier define una aplicación lineal biyectiva

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$$

que conserva el producto escalar salvo un factor constante

$$(2\pi)^n (\mathcal{F}u, \mathcal{F}v) = (u, v), \quad \forall u, v \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

La inversa de la transformada de Fourier es lo que hemos definido como transformación de Fourier inversa.

Hay que advertir que la integral impropia que acompaña a la operación de transformada de Fourier sobre elementos de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  hay que efectuarla en un sentido diferente del habitual. En concreto, se define como

$$c(k) = \lim_{R \rightarrow \infty} c_R(k), \quad c_R(k) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{|x| \leq R} e^{-ikx} u(x) d^n x,$$

donde la operación de límite es la asociada a la convergencia en media

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |c(k) - c_R(k)|^2 d^n k = 0.$$

espacio  
de  
Schwartz

Otro espacio funcional en el que la transformada de Fourier posee importantes propiedades es el *espacio de Schwartz*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \{u \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (x^\alpha D^\beta u) < \infty, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n\},$$

de funciones *test* o de decrecimiento rápido en el infinito. Estamos usando la notación

$$x^\alpha := x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \dots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}.$$

Este espacio funcional está contenido en  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .

**Teorema 2.8.3.** Si  $u = u(x)$  pertenece a  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , entonces su transformada de Fourier existe y es también una función de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Además la transformada de Fourier define una aplicación lineal biyectiva

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Veamos a continuación algunos ejemplos de cálculo de transformadas de Fourier de funciones de una sola variable.

**Ejemplos**

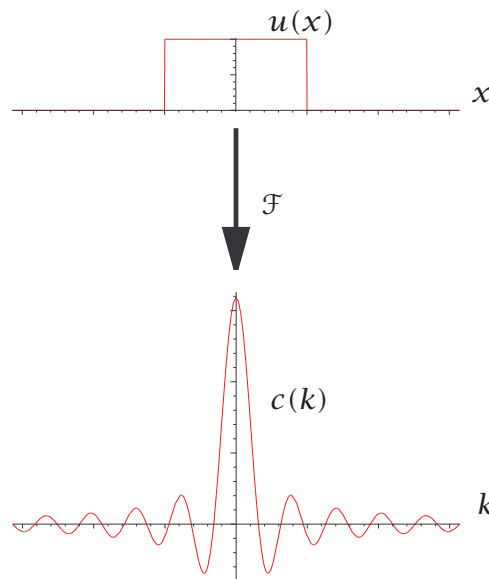
i) Dada la función

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-a, a], \\ 0 & \text{en el resto,} \end{cases}$$

su transformada de Fourier se calcula fácilmente

$$c(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} u(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a e^{-ikx} dx = -\frac{1}{2\pi} \frac{e^{-ikx}}{ik} \Big|_{-a}^a dx = \frac{\sin ka}{\pi k}.$$

Representamos a continuación esta transformación



ii) Sea la función

$$u(x) = \begin{cases} e^{-ax} & x > 0, \\ 0 & \text{en el resto,} \end{cases}$$

donde  $a > 0$ . La transformada es

$$\begin{aligned} c(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} u(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-ikx} e^{-ax} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-(a+ik)x} dx \\ &= -\frac{1}{2\pi} \frac{e^{-(a+ik)x}}{(a+ik)} \Big|_{x=0}^{\infty} = \frac{1}{2\pi} \frac{a-ik}{a^2+k^2} \end{aligned}$$

iii) La función lorentziana tiene la forma

$$u(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}, \quad a > 0.$$

Su transformada

$$c(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \frac{1}{x^2 + a^2} dx,$$

transformada de  
Fourier de la lo-  
rentziana

se calcula con técnicas de variable compleja<sup>16</sup> y el resultado es

$$c(k) = \frac{1}{2a} e^{-a|k|}.$$

También podemos obtener de otra forma este resultado. Calculamos, en primer lugar, la transformada de Fourier de  $e^{-a|x|}$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(e^{-a|x|}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-ax} e^{-ikx} dx + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 e^{ax} e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi(a+ik)} + \frac{1}{2\pi(a-ik)} = \frac{a}{\pi} \frac{1}{a^2+k^2} \end{aligned}$$

Luego

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{a^2+k^2}\right) = \frac{\pi}{a} e^{-a|x|},$$

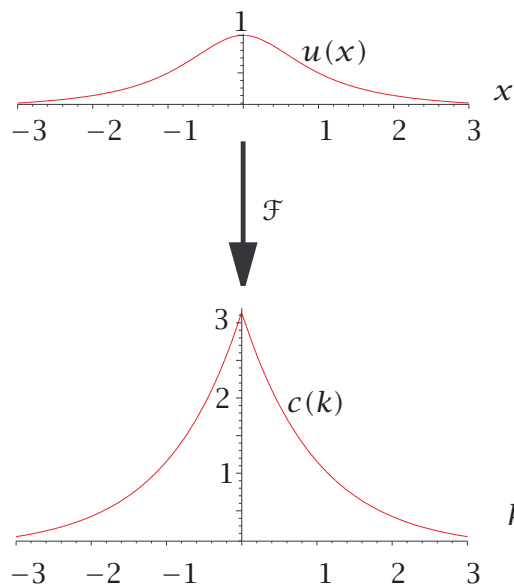
o bien

$$\int_{-\infty}^\infty e^{ikx} \frac{1}{a^2+k^2} dk = \frac{\pi}{a} e^{-a|x|}.$$

Cambiando  $x \rightarrow k$  y  $k \rightarrow -x$  obtenemos el resultado anunciado

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-ixk} \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{2a} e^{-a|k|}.$$

La gráfica correspondiente es



<sup>16</sup>Sea  $f(z) = e^{-ikz}/(z^2 + a^2)$  y  $\gamma$  la recta real orientada de izquierda a derecha. Vamos a computar  $\int_\gamma f(z) dz$  usando residuos. Las singularidades de  $f$  son dos polos simples en  $z = \pm ia$ , allí los residuos de  $f(z)$  son:  $\text{Res}_{z=\pm ia}(f(z)) = \pm e^{\pm ka}/(2ia)$ . Cuando  $k > 0$  la integral es el límite cuando  $R \rightarrow \infty$  de la integral al semi-círculo inferior centrado en el origen de radio  $R$ . En tanto que si  $k < 0$  se selecciona el semi-círculo superior. Por tanto, en cada situación contribuye tan sólo un polo en la fórmula  $\int_\gamma f(z) dz = 2\pi i \sum_{p \text{ polo simple}} \text{Res}_{z=p}(f(z))$ .



### 2.8.2. Propiedades de la transformada de Fourier

Bajo condiciones *apropiadas* sobre las funciones (por ejemplo si estas pertenecen al espacio de Schwartz) la transformada de Fourier tiene una serie de propiedades básicas que a continuación desglosamos. En este primer cuadro recogemos las propiedades más inmediatas

i)

$$u_i(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} c_i(k), \quad i = 1, 2$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda_1 u_1(x) + \lambda_2 u_2(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \lambda_1 c_1(k) + \lambda_2 c_2(k), \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$$

ii)

$$u(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} c(k) \Rightarrow u(x+a) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{ik \cdot a} c(k)$$

iii)

$$u(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} c(k) \Rightarrow e^{i\ell \cdot x} u(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} c(k-\ell)$$

iv) Si  $A \in M_N(\mathbb{R})$  es una matriz invertible entonces

$$u(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} c(k) \Rightarrow u(Ax) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|\det A|} c(A^{-1}k)$$

v)

$$u(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} c(k) \Rightarrow \bar{u}(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \bar{c}(-k)$$

La segunda serie de propiedades, que requieren un mayor análisis, la exponemos a continuación. Usaremos la notación  $D_x^\alpha, D_k^\alpha$  para denotar los operadores de derivación múltiple  $D^\alpha$  con respecto a las variables  $x$  ó  $k$ , respectivamente. Introducimos también la operación de *convolución* de dos funciones  $u$  y  $v$  como sigue

$$(u * v)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)v(y) d^n y = \int_{\mathbb{R}^n} u(y)v(x-y) d^n y.$$

**PROPOSICIÓN 2.8.4. i)**

$$\mathcal{F}(D_x^\alpha(u)) = (ik)^\alpha \mathcal{F}(u).$$

ii)

$$\mathcal{F}(x^\alpha u) = (iD_k)^\alpha \mathcal{F}(u).$$

iii)

$$\mathcal{F}(u * v) = (2\pi)^n \mathcal{F}(u) \mathcal{F}(v).$$

iv) *Identidad de Parseval:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^2 d^n x = (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} |c(k)|^2 d^n k.$$

*Demostración.* **i)** En primer lugar tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ik \cdot x} \frac{\partial u}{\partial x_i} d^n x \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left[ e^{-ik \cdot x} u(x) \Big|_{x_i=-\infty}^{\infty} \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\infty}^{\infty} (-ik_i) e^{-ik \cdot x} u(x) dx_i \right] dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n,\end{aligned}$$

en donde hemos integrado por partes. Si  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  se cumple que

$$u(x) \Big|_{x_i=-\infty}^{\infty} = 0,$$

luego

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = ik_i \mathcal{F}(u).$$

Por ello,

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial^{\alpha_0}}{\partial x_0^{\alpha_0}} \dots \frac{\partial^{\alpha_{n-1}}}{\partial x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}} u\right) = (ik_0)^{\alpha_0} \dots (ik_{n-1})^{\alpha_{n-1}} \mathcal{F}(u).$$

de donde por linealidad se infiere la propiedad buscada.

**ii)** Comenzamos observando que

$$\mathcal{F}(x_i u) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ik \cdot x} x_i u(x) d^n x = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} i \frac{\partial(e^{-ik \cdot x} u(x))}{\partial k_i} d^n x.$$

Si  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  podemos extraer la derivada con respecto al parámetro  $k_i$  fuera de la integral y escribir

$$\mathcal{F}(x_i u) = i \frac{\partial}{\partial k_i} \mathcal{F}(u).$$

Por ello,

$$\mathcal{F}(x_0^{\alpha_0} \dots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} u) = \left(i \frac{\partial}{\partial k_0}\right)^{\alpha_0} \dots \left(i \frac{\partial}{\partial k_{n-1}}\right)^{\alpha_{n-1}} \mathcal{F}(u)$$

y por linealidad se obtiene el resultado deseado.

**iii)** La transformada de una convolución es por definición

$$\mathcal{F}(u * v) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ik \cdot x} \left[ \int_{\mathbb{R}^n} u(y) v(x - y) d^n y \right] d^n x$$

y dado que  $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  podemos escribir

$$\mathcal{F}(u * v) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} e^{-ik \cdot x} u(x - y) v(y) d^n y d^n x,$$

que con el cambio de variables

$$x = \xi + \eta, \quad y = \eta,$$

se transforma en

$$\mathcal{F}(u * v) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} e^{-ik \cdot (\xi + \eta)} u(\xi) v(\eta) d^n \xi d^n \eta = (2\pi)^n \mathcal{F}(u) \mathcal{F}(v),$$

como queríamos demostrar.

iv) El producto escalar en  $L^2(\mathbb{R}^n)$  de  $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  se puede escribir como

$$(u, v) = \int_{\mathbb{R}^n} \bar{u}(y) v(y) d^n y = (\overline{Pu} * v)(0),$$

donde  $Pu(x) = u(-x)$ . Por ello, utilizando el resultado de iii) tenemos

$$(u, v) = (2\pi)^n [\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\overline{Pu})\mathcal{F}(v))](0),$$

esto es

$$(u, v) = (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{ik \cdot x} \bar{c}(k) d(k) d^n k \Big|_{x=0}$$

donde  $c, d$  son las transformadas Fourier de  $u, v$ , respectivamente. Por tanto,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \bar{u}(x) v(x) d^n x = (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} \bar{c}(k) d(k) d^n k,$$

y en particular, para  $u = v$  se obtiene la identidad de Parseval.

□

Aunque en las anteriores demostraciones nos hemos ceñido a funciones de decaimiento rápido, estas propiedades son válidas en situaciones más generales.



### Ejemplos

i) En primer lugar vamos a calcular la transformada de Fourier de la función gaussiana de una variable

$$u(x) = e^{-a^2 x^2}, \quad a > 0.$$

En primer lugar, si derivamos esta función se obtiene

$$D_x u(x) = -2a^2 x u(x),$$

Aplicando la transformada de Fourier a ambos miembros de esta ecuación, y teniendo en cuenta las propiedades i) y ii) que hemos demostrado, deducimos que la transformada  $c(k)$  de la función  $u(x)$  satisface

$$D_k c(k) = -\frac{1}{2a^2} k c(k).$$

Integrando esta ecuación diferencial deducimos que

$$c(k) = c(0) e^{-\frac{k^2}{4a^2}}.$$

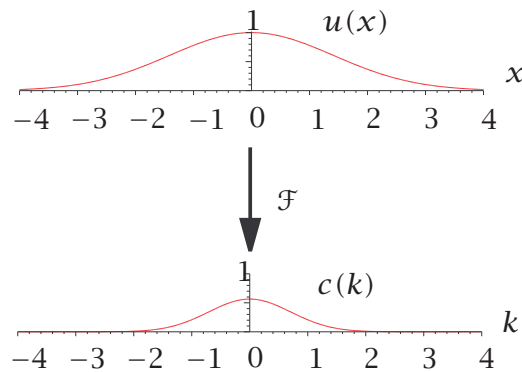
Por otra parte, de la definición de transformada de Fourier

$$\begin{aligned} c(0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 x^2} dx \\ &= \frac{1}{2\pi a} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}. \end{aligned}$$

Por tanto

$$c(k) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} e^{-\frac{k^2}{4a^2}}.$$

Es decir, la transformada de una gaussiana es de nuevo una gaussiana, como se representa en las siguientes gráficas.



transformada de  
Fourier de gaus-  
sianas en  $\mathbb{R}^n$

- ii) Consideremos ahora la transformada de Fourier de la función gaussiana en  $n$  variables

$$u(x) = e^{-\sum_{i,j=0}^{n-1} A_{ij} x_i x_j / 2}$$

donde  $A = (A_{ij})$  es una matriz simétrica ( $A = A^t$ ) y definida positiva ( $(x, Ax) > 0, \forall x \neq 0$ ). Tomando derivadas parciales con respecto a  $x_i$  obtenemos

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = -u(x) \left( \sum_{j=0}^{n-1} A_{ij} x_j \right).$$

Por tanto, utilizando las propiedades i) y ii), encontramos que

$$i k_i c(k) = - \sum_{j=0}^{n-1} A_{ij} i \frac{\partial c}{\partial k_j},$$

y por tanto

$$\frac{\partial c}{\partial k_j} = - \left[ \sum_{j=0}^{n-1} (A^{-1})_{ji} k_i \right] c.$$

Esta EDP de primer orden tiene por solución

$$c(k) = c(0) e^{\sum_{i,j=0}^{n-1} (A^{-1})_{ji} k_i k_j / 2}.$$

Observemos que

$$c(0) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{i,j=0}^{n-1} A_{ij} x_i x_j / 2} d^n x.$$

Al ser  $A$  simétrica y definida positiva, se puede factorizar como  $A = O \Lambda O^t$  donde  $O$  es ortogonal y  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1})$  es la matriz diagonal de autovalores de  $A$ , con  $\lambda_i > 0, i = 0, \dots, n-1$ . Por ello, tras el cambio de coordenadas  $x \rightarrow \tilde{x} = O^{-1}x$ , de jacobiano 1 (como  $O$  es una matriz ortogonal se tiene  $|\det O| = 1$ ),  $c(0)$  se expresa como

$$c(0) = \frac{1}{(2\pi)^n} \prod_{i=0}^{n-1} \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda_i \tilde{x}_i^2 / 2} d\tilde{x}_i = \frac{1}{(2\pi)^n} \prod_{i=0}^{n-1} \sqrt{\frac{2}{\lambda_i}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\tilde{x}_i^2} d\tilde{x}_i.$$

Por tanto, como  $\det A = \lambda_1 \cdots \lambda_n$  obtenemos

$$c(0) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det A}}$$

con lo que

$$c(k) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det A}} e^{-\sum_{i,j=0}^{n-1} (A^{-1})_{ji} k_i k_j / 2}.$$

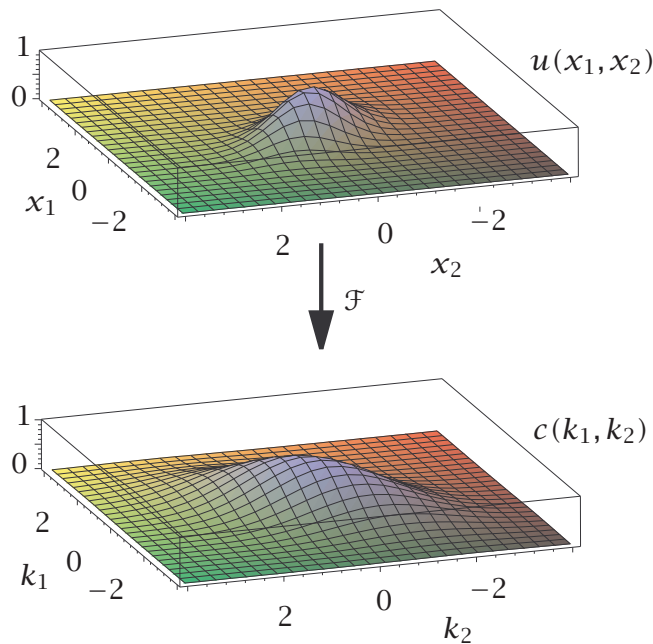
Por ejemplo, la transformada de Fourier de

$$u(x_1, x_2) = e^{-(x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2)}$$

es

$$c(k_1, k_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{3}} e^{-(k_1^2 + k_2^2 - k_1 k_2)/3}.$$

Ahora  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $\det A = 3$  y  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$  y autovalores  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$ . A continuación representamos esta transformación



**ii)** Calculamos ahora la transformada de

$$u(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} x_1 x_2 x_3 & x_1, x_2, x_3 \in [-a, a], \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

En primer lugar observemos que la transformada de Fourier en  $\mathbb{R}^3$  de

$$v(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 1 & x_1, x_2, x_3 \in [-a, a], \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

es

$$\prod_{i=1}^3 \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a e^{-ik_i x_i} dx_i = \frac{1}{\pi^3} \frac{\operatorname{sen} ak_1}{k_1} \frac{\operatorname{sen} ak_2}{k_2} \frac{\operatorname{sen} ak_3}{k_3}.$$

y como  $u(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 v(x_1, x_2, x_3)$  debemos tener que

$$c(k_1, k_2, k_3) = i \frac{\partial}{\partial k_1} i \frac{\partial}{\partial k_2} i \frac{\partial}{\partial k_3} \frac{1}{\pi^3} \frac{\operatorname{sen} ak_1}{k_1} \frac{\operatorname{sen} ak_2}{k_2} \frac{\operatorname{sen} ak_3}{k_3}.$$

Así pues

$$\begin{aligned} c(k_1, k_2, k_3) &= -\frac{i}{\pi^3} \frac{\partial[\operatorname{sen} ak_1/k_1]}{\partial k_1} \frac{\partial[\operatorname{sen} ak_2/k_2]}{\partial k_2} \frac{\partial[\operatorname{sen} ak_3/k_3]}{\partial k_3} \\ &= -\frac{i}{\pi^3} \left[ \frac{ak_1 \cos ak_1 - \operatorname{sen} ak_1}{k_1^2} \right] \left[ \frac{ak_2 \cos ak_2 - \operatorname{sen} ak_2}{k_2^2} \right] \\ &\quad \times \left[ \frac{ak_3 \cos ak_3 - \operatorname{sen} ak_3}{k_3^2} \right] \end{aligned}$$

iii) Para calcular la transformada de Fourier de

$$u(x) = (x-1)^2 e^{-(x+1)^2}$$

desarrollamos  $(x-1)^2$ :

$$u(x) = (x^2 - 2x + 1)e^{-(x+1)^2},$$

y como sabemos que

$$e^{-(x+1)^2} \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{ik} \frac{e^{-k^2/4}}{2\sqrt{\pi}},$$

obtenemos

$$\begin{aligned} c(k) &= \left[ \left( i \frac{d}{dk} \right)^2 - 2i \frac{d}{dk} + 1 \right] \frac{e^{-k^2/4+ik}}{2\sqrt{\pi}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left[ - \left( -\frac{1}{2} + \left( -\frac{k}{2} + i \right)^2 \right) - 2i \left( -\frac{k}{2} + i \right) + 1 \right] e^{-k^2/4+ik} \\ &= \frac{-k^2 + 8ik + 18}{8\sqrt{\pi}} e^{-k^2/4+ik}. \end{aligned}$$

### 2.8.3. Transformadas seno y coseno

Si utilizamos la fórmula de Euler para la exponencial la transformada inversa de Fourier se puede escribir como sigue

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}} [\cos kx + i \operatorname{sen} kx] c(k) dk = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(kx) c(k) dk + \int_{-\infty}^{\infty} i \operatorname{sen}(kx) c(k) dk.$$

transformada de  
Fourier seno y  
coseno

Ahora bien, dada la paridad de las funciones trigonométricas se tiene

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} c(k) \cos kx dk &= \int_0^{\infty} \cos(kx) (c(k) + c(-k)) dk, \\ \int_{-\infty}^{\infty} c(k) i \operatorname{sen} kx dk &= \int_0^{\infty} \operatorname{sen}(kx) i (c(k) - c(-k)) dk, \end{aligned}$$

y si denotamos

$$a(k) := c(k) + c(-k), \quad b(k) := i(c(k) - c(-k))$$

obtenemos

$$u(x) = \int_0^{\infty} a(k) \cos kx \, dk + \int_0^{\infty} b(k) \operatorname{sen} kx \, dk.$$

Recordando que  $c(k)$  es la transformada de Fourier de  $u(x)$ , se deducen las fórmulas siguientes

$$a(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \cos kx \, dx, \quad b(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \operatorname{sen} kx \, dx.$$

Supongamos ahora que  $u(x)$  es par,

$$u(x) = u(-x).$$

En ese caso, argumentos de paridad nos llevan a

$$a(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} u(x) \cos kx \, dx, \quad b(k) = 0, \quad (2.16)$$

(notar que  $c(k) = c(-k)$ ). Por todo ello

$$u(x) = \int_0^{\infty} a(k) \cos kx \, dk. \quad (2.17)$$

En cambio, si  $u(x)$  es impar,

$$u(x) = -u(-x)$$

los mismos argumentos de paridad conducen a

$$a(k) = 0, \quad b(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} u(x) \operatorname{sen} kx \, dx, \quad (2.18)$$

ahora  $c(k) = -c(-k)$ . Así

$$u(x) = \int_0^{\infty} b(k) \operatorname{sen} kx \, dk. \quad (2.19)$$

Observamos, que en las fórmulas anteriores (2.16) y (2.18), para  $u(x)$  con paridad bien definida, sólo aparece su contribución para  $x \geq 0$ . Luego, si sólo conociéramos la función  $u(x)$  en el semi-eje positivo las fórmulas (2.17) y (2.19) dan sus extensiones par e impar, respectivamente, a toda la recta.

### Transformada de Fourier en $\mathbb{R}^3$ para funciones radiales

Analicemos la transformada de Fourier en  $\mathbb{R}^3$  de funciones  $u(x)$  que en coordenadas esféricas sólo dependen del radio

$$u(r, \theta, \phi) = u(r).$$

Para ello, para cada  $k = (k_1, k_2, k_3)$  en el cálculo de la integral correspondiente escogemos coordenadas esféricas adaptadas a la dirección marcada por  $k$ : esto es,  $k$  tiene ángulos  $\theta = \phi = 0$ . Por tanto,

$$\begin{aligned} c(k) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i k \cdot x} u(r) d^3 x \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \left[ \int_0^\pi \left[ \int_0^{2\pi} e^{-i \|k\| r \cos \theta} u(r) r^2 \sin \theta d\phi \right] d\theta \right] dr \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \left[ \int_0^\pi e^{-i \|k\| r \cos \theta} \sin \theta d\theta \right] u(r) r^2 dr \end{aligned}$$

que como

$$\int_0^\pi e^{-i \|k\| r \cos \theta} \sin \theta d\theta = \int_{-1}^1 e^{-i \|k\| r u} du = 2 \frac{\sin \|k\| r}{\|k\| r}$$

se transforma en

$$c(k) = c(\|k\|) = \frac{1}{2\pi^2 \|k\|} \int_0^\infty u(r) r \sin(\|k\| r) dr.$$

Vemos que la transformada sólo depende del módulo de  $k$  y no de su dirección o sentido; más aún, ésta adopta la forma de una transformada seno.

## 2.9. Cuestiones, problemas y ejercicios

### 2.9.1. Cuestiones

1. El dominio del operador diferencial  $L = -D^2$  es el conjunto de funciones  $u$  diferenciables en el intervalo  $[a, b]$  con peso  $\rho(x) = 1$ . Determinar cuales de las siguientes condiciones de contorno definen dominios en que el operador es simétrico

- a)  $u(a) = 0, u'(a) = 0$
- b)  $2u(a) - u'(a) = 0, 3u(a) + 2u(b) = 0$
- c)  $u(a) + u'(a) = 0, 2iu(a) + u(b) = 0$
- d)  $u(a) - 2u'(b) = 0, u(b) + 2u'(a) = 0$
- e)  $u(a) + u(b) = 0, u'(a) - u'(b) = 1$



**Resolución** Las condiciones de contorno deben ser homogéneas y con coeficientes reales, así quedan descartadas las opciones (c), (e). Para discernir la respuesta correcta entre las tres opciones restantes recordemos que el operador  $-D^2$  es simétrico si para toda pareja de funciones  $u, v$  del dominio se cumple  $\bar{u}(a)v'(a) - \bar{u}'(a)v(a) = \bar{u}(b)v'(b) - \bar{u}'(b)v(b)$ . Por tanto, la opción (a) queda descartada inmediatamente ( $0 \neq \bar{u}(b)v'(b) - \bar{u}'(b)v(b)$ ). En la opción (b) podemos expresar  $u'(a) = 2u(a)$  y  $u(b) = -3/2u(a)$  en términos de  $u(a)$ , así tenemos  $\bar{u}(a)v'(a) - \bar{u}'(a)v(a) = 0$  y  $\bar{u}(b)v'(b) - \bar{u}'(b)v(b) = -3/2(\bar{u}(a)v'(b) - v(a)\bar{u}(a))$ ; por tanto no es correcta. Veamos que la opción (d) es correcta, ahora tenemos  $u'(b) = u(a)/2$  y  $u'(a) = -u(b)/2$ , así  $\bar{u}(a)v'(a) - \bar{u}'(a)v(a) = -(\bar{u}(a)v(b) - \bar{u}(b)v(a))/2$  y  $\bar{u}(b)v'(b) - \bar{u}'(b)v(b) = (\bar{u}(b)v(a) - \bar{u}(a)v(b))/2$  y se da la igualdad.

2. Determinar los autovalores del operador diferencial

$$Lu = -D^2u,$$

actuando sobre el dominio de funciones diferenciables en  $[0, 1]$  que cumplen las condiciones de contorno

$$u_x(0) = 0, \quad u(1) = 0.$$

- a)  $4n^2\pi^2, n \geq 1$
- b)  $(2n+1)^2\pi^2/4, n \geq 0$
- c)  $(2n+2)^2\pi^2/4, n \geq 0$
- d)  $n\pi^2, n \geq 1$
- e)  $n^2\pi^2, n \geq 1$

**Resolución** En primer lugar observamos que  $\lambda = 0$  no es autovalor ya que si este es el caso entonces  $u(x) = A + Bx$ , con  $A, B$  constantes que determinan las condiciones de contorno como  $A = B = 0$ . Las soluciones del problema de autovalores  $-u_{xx} = \lambda u, \lambda \neq 0$ , son de la forma  $u = A e^{ikx} + B e^{-ikx}$ , con  $\lambda = k^2$ . Como  $u_x|_{x=0} = ik(A - B)$  y  $u|_{x=1} = e^{ik}A + e^{-ik}B$  al imponer las condiciones de contorno obtenemos el siguiente sistema lineal

$$\begin{cases} ik(A - B) = 0, \\ e^{ik}A + e^{-ik}B = 0. \end{cases} \quad \text{Este siste-}$$

ma posee soluciones no nulas, v. g.  $(A, B) \neq (0, 0)$ , siempre que  $\begin{vmatrix} ik & -ik \\ e^{ik} & e^{-ik} \end{vmatrix} = 0$ , lo que conduce  $\cos k = 0 \Leftrightarrow k = (n + 1/2)\pi, n = 0, 1, 2, \dots$ , y así los autovalores son  $\lambda_n = (n + 1/2)^2\pi^2, n = 0, 1, 2, \dots$

3. Si  $u(\mathbf{x})$  es solución de la ecuación de Poisson

$$\Delta u = \rho, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3,$$

y

$$\hat{\rho}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x};$$

es la transformada de Fourier de la función  $\rho(\mathbf{x})$ , entonces la transformada de Fourier  $\hat{u}$  de  $u$  verifica

- a)  $|\mathbf{k}|^2 \hat{u}(\mathbf{k}) + \hat{\rho}(\mathbf{k}) = 0$
- b)  $|\mathbf{k}| \hat{u}(\mathbf{k}) + 2\hat{\rho}(\mathbf{k}) = 0$
- c)  $\hat{u}(\mathbf{k}) + \hat{\rho}(\mathbf{k}) = 0$
- d)  $|\mathbf{k}|^2 \hat{u}(\mathbf{k}) = 0$
- e)  $|\mathbf{k}|^2 \hat{u}(\mathbf{k}) - \hat{\rho}(\mathbf{k}) = 0$

**Resolución** Realizando la transformada Fourier de la ecuación de Poisson tenemos

$$\mathcal{F}(\Delta u) = \hat{\rho},$$

recordando que  $i k_i \mathcal{F}(u) = \mathcal{F}(D_{x_i} u)$  obtenemos

$$\mathcal{F}(\Delta u) = \left[ (i k_1)^2 + (i k_2)^2 + (i k_3)^2 \right] \hat{u} = -|\mathbf{k}|^2 \hat{u}.$$

y por tanto el resultado correcto es (a).

4. Dado el operador diferencial

$$Lu := -D(e^x Du),$$

determinar para que valor de  $c$  las siguientes condiciones de contorno

$$\begin{cases} u(0) + cu(1) = 0, \\ u'(0) + cu'(1) = 0 \end{cases}$$

definen un dominio de  $L^2([0, 1])$  en que el operador es simétrico

- a)  $c = 0$
- b)  $c = \sqrt{e}$
- c)  $c = e$
- d)  $c = -1$

**Resolución** El operador  $L$  es del tipo Sturm-Liouville con  $p(x) = e^x, q(x) = 0$  sobre el intervalo  $[0, 1]$ . Por tanto, la condición para que sea simétrico es

$$\begin{vmatrix} \bar{u}(0) & v(0) \\ \bar{u}_x(0) & \bar{v}(0) \end{vmatrix} = e \begin{vmatrix} \bar{u}(1) & v(1) \\ \bar{u}_x(1) & \bar{v}(1) \end{vmatrix}$$

para toda pareja de funciones  $u, v$  en el dominio. Usando las condiciones de contorno obtenemos que el primer determinante es

$$\begin{vmatrix} \bar{u}(0) & v(0) \\ \bar{u}_x(0) & \bar{v}(0) \end{vmatrix} = c^2 \begin{vmatrix} \bar{u}(1) & v(1) \\ \bar{u}_x(1) & \bar{v}(1) \end{vmatrix}$$

de donde se concluye que se debe tener  $c^2 = e$ .

5. Sea el operador diferencial

$$Lu = -D^2u,$$

actuando sobre el dominio de funciones diferenciables en  $[0, 1]$  que cumplen las condiciones de contorno

$$\begin{cases} u'(0) = 0, \\ u(1) + u'(1) = 0. \end{cases}$$

Señalar cual de las siguientes relaciones determina los autovalores  $\lambda = k^2$  de  $L$

- a)  $\operatorname{sen} k = 0$
- b)  $k \operatorname{sen} k = 1$
- c)  $k \tan k = 1$
- d)  $k \cos k = 0$
- e)  $k \tan k = 0$

**Resolución** Las posibles autofunciones de  $L$  han de ser de la forma  $u(x) = a \cos kx + b \operatorname{sen} kx$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  y con autovalor no nulo  $\lambda = k^2$  (para  $\lambda = 0$  se buscan soluciones  $u(x) = a + bx$ , que una vez se aplican las condiciones de contorno fija  $u = 0$ ). La derivada es  $u'(x) = -a \operatorname{sen} x + b \cos x$ . Por tanto, la existencia de soluciones no triviales conduce a

$$\begin{vmatrix} 0 & k \\ \cos k - k \operatorname{sen} k & \operatorname{sen} k + k \cos k \end{vmatrix} = 0$$

que implica

$$k(\cos k - k \operatorname{sen} k) = 0.$$

6. Calcular los autovalores del problema

$$\begin{aligned} -(1+x) \frac{d}{dx} \left( (1+x) \frac{du}{dx} \right) &= \lambda u, \quad 0 < x < 1, \\ u(0) &= u(1) = 0. \end{aligned}$$

- a)  $\lambda = (2n+1)^2 \pi^2$ ,  $n = 1, 2, \dots$
- b)  $\lambda = \left[ \frac{(2n+1)\pi}{\ln 2} \right]^2$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$
- c)  $\lambda = n^2 \pi^2$ ,  $n = 1, 2, \dots$
- d)  $\lambda = \left( \frac{n\pi}{\ln 2} \right)^2$ ,  $n = 1, 2, \dots$
- e)  $\lambda = \left( \frac{n\pi}{\ln 2} \right)^2$ ,  $n = 1, 3, 5, \dots$  y  $\lambda = (2n+1)^2 \pi^2$ ,  $n = 0, 2, 4, \dots$

**Resolución** Utilizando la variable  $y := x + 1$  el problema de autovalores es  $y^2 u_{yy} + y u_y + \lambda u = 0$ . Esta es una ecuación homogénea cuya solución general es

$$\begin{cases} ay^{\sqrt{|\lambda|}} + by^{-\sqrt{|\lambda|}}, & \text{cuando } \lambda < 0, \\ a + b \ln y, & \text{cuando } \lambda = 0, \\ a \cos(\sqrt{\lambda} \ln y) + b \sin(\sqrt{\lambda} \ln y), & \text{cuando } \lambda > 0, \end{cases}$$

Si  $\lambda < 0$  la existencia de soluciones no triviales satisfaciendo las condiciones de contorno implica que  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2\sqrt{|\lambda|} & 2^{-\sqrt{|\lambda|}} \end{vmatrix}$  que es imposible. El caso  $\lambda = 0$  es descartado por el mismo argumento. Finalmente para  $\lambda < 0$  se obtiene  $\sqrt{\lambda} \ln 2 = n\pi$ ,  $n = 1, 2, \dots$ .

7. Calcular la transformada de Fourier de la función

$$u(x, y) = xe^{-x^2 - y^2}.$$

$$a) \ c(k_1, k_2) = -\frac{i}{8\pi} k_1 e^{-(k_1^2 + k_2^2)/4}$$

$$b) \ c(k_1, k_2) = -\frac{1}{8\pi} k_1 e^{-(k_1^2 + k_2^2)/4}$$

$$c) \ c(k_1, k_2) = -\frac{i}{4\pi} k_1 e^{-(k_1^2 + k_2^2)/4}$$

$$d) \ c(k_1, k_2) = -\frac{i}{8\pi} e^{-(k_1^2 + k_2^2)/4}$$

$$e) \ c(k_1, k_2) = -\frac{i}{8\pi} k_1^2 e^{-(k_1^2 + k_2^2)/4}$$

**Ayuda:**  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-k^2/4}.$

**Resolución** Si  $\mathcal{F}^{(n)}(u) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} u(x) e^{-ik \cdot x} dx$  denota la transformada de Fourier entonces  $\mathcal{F}^{(2)}(u(x, y)) = \mathcal{F}^{(1)}(xe^{-x^2}) \mathcal{F}^{(1)}(e^{-y^2})$  que utilizando  $\mathcal{F}^{(n)}(x_i u) = i\partial/\partial k_i \mathcal{F}(u)$  y que  $\mathcal{F}^{(1)}(e^{-x_i^2}) = e^{-k_i^2/4} / (2\sqrt{2\pi})$  conduce inmediatamente a la respuesta (a).

8. Evaluar la solución del problema de ondas

$$u_{tt} - 4u_{xx} = 0 \quad t > 0, \ 0 < x < \infty$$

$$u(x, 0) = \sin \pi x,$$

$$u_t(x, 0) = \cos \pi x.$$

en el punto  $x = 1$ ,  $t = 1$ .

$$a) \ 0.$$

$$b) \ -\frac{2}{\pi}.$$

c)  $\frac{2}{\pi} + 1$ .

d)  $\frac{2}{3}$ .

e)  $\frac{1}{2} + \pi$ .

**Resolución** La fórmula de d'Alambert para la ecuación de ondas en la semi-recta ( $u(0, t) = 0$ ) es

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(\Phi(x + 2t) + \Phi(x - 2t)) + \frac{1}{4} \int_{x-2t}^{x+2t} \Psi(x) dx,$$

donde  $\Phi(x) = \sin(\pi x)$  es la extensión impar de  $u(x, 0)$  y

$$\Psi(x) = \begin{cases} \cos(\pi x), & x > 0, \\ -\cos(\pi x), & x < 0 \end{cases}$$

es la extensión impar de  $u_t(x, 0)$ . Por tanto,

$$u(1, 1) = \frac{1}{2}(\sin(3\pi) + \sin(-\pi)) - \frac{1}{4} \int_{-1}^0 \cos(\pi x) dx + \frac{1}{4} \int_0^3 \cos(\pi x) dx = 0.$$

9. Determinar el valor en  $x = 0$  de la serie de Fourier en senos y cosenos de la función

$$u(x) = \frac{\sin x}{|x|}, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

- a) 0  
b) 1  
c) -1  
d) 2  
e) -2

**Resolución** La función  $u(x)$  no es continua en el origen, sus límites laterales son  $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} u(x) = \pm 1$ , y por ello su semisuma es  $(u^+ + u^-)/2 = 0$ . Recordando el teorema de Dirichlet concluimos que la serie converge puntualmente a 0 en el 0.

10. Sea el desarrollo en serie de Fourier en senos y cosenos

$$x^{10} + 2x^8 + 4 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

Averiguar cuál de las siguientes afirmaciones es correcta

a)  $b_n = 1/n^3$

$$b) a_n = \begin{cases} 1/n^3, & n \text{ par} \\ 0, & n \text{ impar} \end{cases}$$

$$c) a_n = 0$$

$$d) b_n = 0$$

$$e) a_n = b_n$$

**Resolución** Como la función desarrollada  $u(x) := x^{10} + 2x^8 + 4$  es par respecto al punto medio del intervalo,  $x = 0$ , tenemos que  $b_n = 0$ . Por ello, (a), (c) y (e) son falsos y (d) es cierta. La respuesta (b) es falsa ya que  $f(-\pi/4) \neq f(3\pi/4)$ .

11. El operador diferencial

$$L = x \frac{d}{dx} x \frac{d}{dx}$$

actúa sobre el conjunto de funciones de cuadrado integrable con peso  $\rho(x) = 1/x$  definidas en el intervalo  $[1, e]$  que satisfacen las condiciones de contorno

$$u(1) = 0, \quad u(e) + cu'(e) = 0.$$

Determinar cual de los siguientes valores de la constante  $c$  define un dominio sobre el que el operador es simétrico:

a)  $c$  real arbitrario

b)  $c$  imaginario puro arbitrario

c)  $c = 1 + i$

d) No existe  $c$  para el que el operador es simétrico

e)  $c = 1 - i$

**Resolución** El operador es del tipo Sturm-Liouville. Además si  $c \in \mathbb{R}$  es regular con condiciones de contorno separadas y por ello simétrico. Se puede comprobar también que es condición necesaria.

12. Dada la función

$$u(x) = |x| \cot(x), \quad -1 < x < 1,$$

determinar el valor en  $x = 0$  de su serie de Fourier en senos.

a)  $1/2$

b)  $0$

c)  $-1$

d)  $1$

e)  $-1/2$

**Resolución** La función

$$u(x) = \frac{|x|}{\operatorname{sen} x} \cos x$$

es continua en todo el intervalo salvo para  $x = 0$  en donde existen los límites laterales de la función:  $u_- = -1$  y  $u_+ = 1$ . Por tanto, el teorema de Dirichlet nos asegura que el valor de la suma de la correspondiente serie de Fourier en  $x = 0$  es  $(u_- + u_+)/2 = 0$ .

13. Calcular la transformada de Fourier de la función

$$u(x) = \begin{cases} xe^x, & -\infty < x < 1 \\ 0, & 1 < x < \infty \end{cases}$$

$$a) \ c(k) = \frac{i}{2\pi} \frac{k^2}{(1-ik)^2} e^{1-ik}$$

$$b) \ c(k) = -\frac{i}{4\pi} \frac{k}{(1-ik)^2} e^{1-ik}$$

$$c) \ c(k) = \frac{1}{2\pi} \frac{k}{(1-ik)^2} e^{1-ik}$$

$$d) \ c(k) = -\frac{i}{2\pi} \frac{k}{(1-ik)^2} e^{1-ik}$$

$$e) \ c(k) = -\frac{i}{2\pi} \frac{k}{(1-ik)^2} e^{1-ik^2}$$

**Resolución** Llamando  $v(x) = \begin{cases} e^x, & -\infty < x < 1 \\ 0, & 1 < x < \infty \end{cases}$  tenemos para la transformada de Fourier  $\mathcal{F}(u) = \mathcal{F}(xv) = iD_k \mathcal{F}(v)$ . Pero  $\mathcal{F}(v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^1 e^{(1-ik)x} dx = e^{(-ik)/(2\pi(1-ik)^2)}$ . De donde se deduce la respuesta inmediatamente.

14. Determinar en cuantos puntos del intervalo  $[-\pi/2, \pi/2]$  se anula la serie de Fourier

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2nix}$$

de la función

$$u(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{|x|}.$$

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

e) 4

**Resolución** Al ser una serie de Fourier en exponenciales con funciones del tipo  $e^{2nix}$  deducimos que  $\omega = 2\pi/(b-a) = 2$  y por ello la longitud del intervalo es  $b-a = \pi$ . Por tanto, podemos tomar  $[a, b] = [-\pi/2, \pi/2]$ . La función es  $C^1$  a trozos en este intervalo con una única discontinuidad en  $x = 0$ . Aquí tenemos los siguientes límites laterales

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} u(x) = \pm 1,$$

cuya semisuma es nula. El teorema de Dirichlet nos permite asegurar que la serie de Fourier se anula en  $x = 0$  y como la función no se anula en ningún punto del intervalo podemos afirmar que la respuesta correcta es la b).

15. Determinar en cuantos puntos del intervalo  $[0, 3\pi]$  la serie de Fourier

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

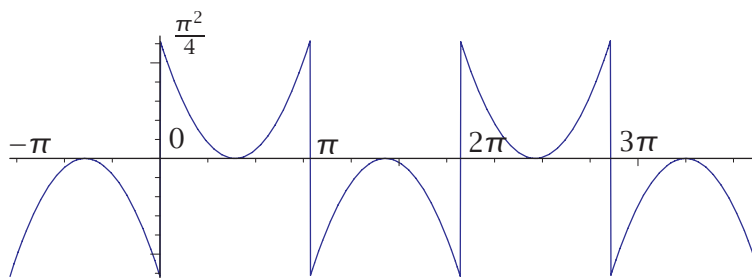
de la función

$$u(x) = \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2$$

se anula.

- a) 3
- b) 5
- c) 2
- d) 8
- e) 7

**Resolución** Al tratarse de series de Fourier en  $\sin nx$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , vemos que  $\omega = 2$  y  $a = 0$  (recordar que en las series los senos aparecen en la forma  $\sin(n\omega(x-a)/2)$ ), y por ello el intervalo donde se debe considerar la función  $u(x) = (x - \pi/2)^2$  definida es  $[0, \pi]$ . La serie de Fourier de senos, de acuerdo con el teorema de Dirichlet, convergera puntualmente a la extensión periódica a la recta real de la extensión impar de  $u$  al intervalo  $[-\pi, \pi]$ . A continuación representamos la gráficas de esta extensión periódica impar



Vemos que la función es discontinua en los puntos  $\{0, \pi, 2\pi, 3\pi\}$ , y según el teorema de Dirichlet la serie de Fourier convergera a la semisuma de los límites laterales que en este caso vale 0. Por otro lado, tenemos los ceros de la serie siguientes  $\{\pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2\}$ . En definitiva, en el intervalo  $[0, 3\pi]$  la serie de Fourier se anula 7 veces y la respuesta correcta es la e).



16. En el siguiente desarrollo en serie de Fourier

$$x^2 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)), \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

señalar cual de las siguientes opciones determina los coeficientes  $b_n$ .

- a)  $b_n = -\frac{\pi}{n^2}$
- b)  $b_n = 2\frac{\pi}{n}$
- c)  $b_n = -2\frac{\pi}{n^2}$
- d)  $b_n = 3\frac{\pi}{n}$
- e)  $b_n = -4\frac{\pi}{n}$

**Resolución** Los coeficientes  $b_n$  se determinan por la formula

$$b_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b \operatorname{sen}(n\omega x) u(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(nx) x^2 dx.$$

Esta integral, que es inmediata, se puede calcular por partes tal como se indica a continuación

$$\begin{aligned} x^2 \operatorname{sen} x &= \left( -x^2 \frac{\cos nx}{n} \right)' + 2x \frac{\cos nx}{n} \\ &= \left( -x^2 \frac{\cos nx}{n} + 2x \frac{\operatorname{sen} nx}{n^2} \right)' - 2 \frac{\operatorname{sen} nx}{n^2} \\ &= \left( -x^2 \frac{\cos nx}{n} + 2x \frac{\operatorname{sen} nx}{n} + 2 \frac{\cos nx}{n^3} \right)', \end{aligned}$$

y por ello

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \left( -x^2 \frac{\cos nx}{n} + 2x \frac{\operatorname{sen} nx}{n} + 2 \frac{\cos nx}{n^3} \right) \Big|_{x=0}^{x=2\pi} \\ &= -\frac{4\pi}{n} \end{aligned}$$

y la respuesta correcta es la e).

17. Determinar la transformada de Fourier  $c(k_1, k_2, k_3)$  de la siguiente función

$$u = \begin{cases} \frac{e^{-x-y}}{z^2 + 4} & \text{si } x > 0 \text{ y } y > 0, \\ 0 & \text{en el resto del plano.} \end{cases}$$

- a)  $\frac{1}{16\pi^2} \frac{e^{-2|k_3|}}{(1+ik_1)(1+ik_2)}$
- b)  $\frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{(1+ik_1)(1+ik_2)(1+ik_3)}$

$$c) \frac{1}{16\pi^2} \frac{e^{-|k_2|}}{(1 + i k_1)(1 + i k_3)}$$

$$d) \frac{1}{16\pi^2} \frac{e^{-|k_3|}}{(1 + i k_1^2)(1 + i k_2)}$$

$$e) \frac{1}{16\pi^2} \frac{e^{-2|k_1|}}{(1 + i k_2)(1 + i k_3)}$$

**Ayuda:**

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{x^2 + a^2} dx = \frac{e^{-a|k|}}{2a}$$

siempre que  $a > 0$ .

**Resolución:** Como la función se factoriza  $u = u_1(x)u_2(y)u_3(z)$  tenemos

$$\mathcal{F}^{(3)}(u) = \mathcal{F}^{(1)}(u_1)\mathcal{F}^{(1)}(u_2)\mathcal{F}^{(1)}(u_3).$$

Pero, sabemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{(1)}(u_1) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-ik_1x} e^{-x} dx = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1 + i k_1}, \\ \mathcal{F}^{(1)}(u_2) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-ik_2y} e^{-y} dy = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1 + i k_2}, \\ \mathcal{F}^{(1)}(u_3) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-ik_1z} \frac{1}{z^2 + 4} dz = \frac{e^{-2|k_3|}}{4},\end{aligned}$$

y por tanto la respuesta correcta es la a).

18. Hallar la transformada de Fourier  $c(k_1, k_2)$  de la siguiente función

$$u = \begin{cases} xye^{-x-y} & \text{si } x > 0 \text{ y } y > 0, \\ 0 & \text{en el resto del plano.} \end{cases}$$

$$a) \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{(1 - i k_1)(1 - i k_2)}$$

$$b) \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{(1 + i k_1)^2(1 + i k_2)^2}$$

$$c) -\frac{i}{4\pi^2} \frac{1}{(1 - i k_1)^2(1 - i k_2)^2}$$

$$d) \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{(1 + i k_1^2)(1 + i k_2)}$$

$$e) -\frac{i}{4\pi^2} \frac{1}{(1 + i k_2)^2(1 + i k_3)^2}$$

**Resolución:** Denotemos por

$$G := \begin{cases} e^{-x-y} & \text{si } x > 0 \text{ y } y > 0, \\ 0 & \text{en el resto del plano.} \end{cases}$$

Sabemos que

$$\mathcal{F}^{(2)}(G) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{(1 + ik_1)(1 + ik_2)}$$

y también que

$$\mathcal{F}^{(2)}(xyG) = iD_{k_1} iD_{k_2} \mathcal{F}^{(2)}(G).$$

Por todo ello deducimos que

$$\mathcal{F}^{(2)}(xyG) = \frac{1}{(1 + ik_1)^2(1 + ik_2)^2},$$

y la respuesta correcta es la b).

19. Hallar la transformada de Fourier  $c(k)$  de la siguiente función

$$u = xe^{-|x+2|/4}$$

a)  $-\frac{8}{\pi} \frac{16k^2 + 2ik + 1}{(16k^2 + 1)^2} e^{2ik}$

b)  $\frac{8}{\pi} \frac{8k^2 - 2k + 1}{(16k^2 + 1)^2} e^{2ik}$

c)  $\frac{1}{\pi} \frac{16k^2 + 16ik + 1}{(16k^2 + 1)^2} e^{-2ik}$

d)  $-\frac{8}{\pi} \frac{16k^2 + 16ik + 1}{(16k^2 + 1)^2} e^{2ik}$

e)  $\frac{1}{2\pi} \frac{k^2 - 2ik + 1}{(16k^2 + 1)^2}$

**Resolución:** En primer lugar calculamos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(e^{-|x|/4}) &= \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\infty}^0 e^{-ikx+x/4} dx + \int_0^{\infty} e^{-ikx-x/4} dx \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{\frac{1}{4} - ik} + \frac{1}{\frac{1}{4} + ik} \right) \\ &= \frac{4}{\pi} \frac{1}{1 + 16k^2}, \end{aligned}$$

en segundo lugar recordamos que  $\mathcal{F}(u(x+a)) = e^{ika} \mathcal{F}(u(x))$  y por ello

$$\mathcal{F}(e^{-|x+2|/4}) = \frac{4}{\pi} \frac{1}{1 + 16k^2} e^{2ik}.$$

En tercer y último lugar observamos que

$$\mathcal{F}(xe^{-|x+2|/4}) = iD_k \mathcal{F}(e^{-|x+2|/4}) = iD_k \frac{4}{\pi} \frac{1}{1 + 16k^2} e^{2ik} = -\frac{8}{\pi} \frac{16k^2 + 16ik + 1}{(16k^2 + 1)^2} e^{2ik}.$$

La respuesta correcta es la d).

20. Hallar la ecuación que determina los autovalores  $\lambda = k^2$  del problema

$$-u_{xx} = \lambda u, \quad 0 < x < l,$$

$$\begin{cases} hu(0) - u_x(0) = 0, \\ hu(l) + u_x(l) = 0, \end{cases}$$

siendo  $h, l > 0$  dados

- a)  $\tan kl = 2hk/(k^2 - h^2)$
- b)  $\tan kl = 2h/(k^2 + h^2)$
- c)  $\tan kl = hk^2/(2k^2 + h^2)$
- d)  $\tan kl = -2h/(k^2 + h^2)$
- e)  $\tan kl = -hk^2/(2k^2 + h^2)$

**Resolución** Estamos ante condiciones de contorno separadas y un operador de Sturm-Liouville regular, por ello el operador es simétrico, con espectro simple y creciente. El valor  $\lambda = 0$  tendría como solución  $u = c_1 + c_2x$  ( $u_x = c_2$ ) y las condiciones de contorno impondrían

$$hc_1 - c_2 = 0,$$

$$hc_1 + (hl + 1)c_2 = 0$$

cuya única solución es trivial  $c_1 = c_2 = 0$ . Por tanto,  $\lambda = 0$  no es autovalor. Supongamos  $\lambda \neq 0$  e impongamos las condiciones de contorno a

$$u(x) = c_1 \cos(kx) + c_2 \sin(kx), \quad (u_x = -kc_1 \sin(kx) + kc_2 \cos(kx))$$

El sistema al que conducen es

$$hc_1 - kc_2 = 0,$$

$$(h \cos(kl) - k \sin(kl))c_1 + (h \sin(kl) + k \cos(kl))c_2 = 0,$$

y la existencia de soluciones no triviales equivale a

$$h(h \sin(kl) + k \cos(kl)) + k(h \cos(kl) - k \sin(kl)) = 0.$$

Esto es

$$(h^2 - k^2) \sin(kl) + 2kh \cos(kl) = 0$$

y  $k$  se determina por la relación espectral siguiente

$$\tan kl = \frac{2hk}{k^2 - h^2}.$$

Por tanto, la respuesta correcta es a).

### 2.9.2. Problemas

1. Determinar la transformada de Fourier en  $\mathbb{R}^2$

$$c(k_1, k_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} u(x, y) e^{-i(k_1x + k_2y)} dx dy,$$

de la función

$$u(x, y) = (x + y)e^{-x^2 - |y|}$$

**Ayuda:**  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-ikx} dx = \sqrt{\pi} e^{-k^2/4}.$

**Resolución** En primer lugar debemos tener en cuenta que

$$\mathcal{F}(u) = i(D_{k_1} + D_{k_2})\mathcal{F}(e^{-x^2-|y|}).$$

En segundo lugar que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(e^{-x^2-|y|}) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-|y|} e^{-i(k_1x+k_2y)} dx dy \\ &= \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} e^{-ik_1x} dx \right] \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-|y|} e^{-ik_2y} dy \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-k_1^2/4} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-|y|} e^{-ik_2y} dy.\end{aligned}$$

Por último,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-|y|} e^{-ik_2y} dy = \int_{-\infty}^0 e^{(1-ik_2)y} dy + \int_0^{\infty} e^{-(1+ik_2)y} dy = \frac{1}{1-ik_2} + \frac{1}{1+ik_2} = \frac{2}{1+k_2^2}.$$

Por todo ello,

$$\mathcal{F}(e^{-x^2-|y|}) = \frac{1}{2\sqrt{\pi^3}} e^{-k_1^2/4} \frac{1}{1+k_2^2}$$

y finalmente

$$\boxed{\mathcal{F}(u) = -\frac{i}{2\sqrt{\pi^3}} \frac{e^{-k_1^2/4}}{1+k_2^2} \left( \frac{k_1}{2} + \frac{2k_2}{1+k_2^2} \right)}.$$

2. Sea el problema espectral

$$\begin{aligned}-u_{xx} &= \lambda u, \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u_x(0) + u(0) &= 0, \quad u(1) = 0.\end{aligned}$$

- Hallar la ecuación que determina los autovalores y probar que tiene infinitas soluciones.
- Calcular las autofunciones correspondientes. ¿Forman un conjunto ortogonal completo en  $L^2([0, 1])$ ?
- Desarrollar la función

$$u(x) = x \sin(\pi x)$$

en serie de tales autofunciones.

**Ayuda:**

$$\begin{aligned}\int_0^1 x \sin(\pi x) \sin(k_n x) dx &= \frac{\pi (\sin(k_n) \pi^2 - 2 \cos(k_n) k_n - \sin(k_n) k_n^2 - 2 k_n)}{(\pi - k_n)^2 (\pi + k_n)^2}, \\ \int_0^1 x \sin(\pi x) \cos(k_n x) dx &= \frac{\pi (\cos(k_n) \pi^2 + 2 \sin(k_n) k_n - \cos(k_n) k_n^2)}{(\pi - k_n)^2 (\pi + k_n)^2} \\ \int_0^1 \sin^2(k_n x) dx &= \frac{1}{2} \frac{-\cos(k_n) \sin(k_n) + k_n}{k_n} \\ \int_0^1 \sin(k_n x) \cos(k_n x) dx &= \frac{1}{2} \frac{\sin(k_n)^2}{k_n} \\ \int_0^1 \cos^2(k_n x) dx &= \frac{1}{2} \frac{\cos(k_n) \sin(k_n) + k_n}{k_n}\end{aligned}$$

**Resolución** Es un problema de Sturm-Liouville regular con condiciones de contorno separadas por tanto sus autovalores son reales, simples y forman una secuencia creciente  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$ , ( $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$ ); **en tanto que sus autofunciones**  $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$  **forman una base ortogonal** de  $L^2([0, 1])$ . Pongamos  $\lambda = k^2$ , por ello  $k \in \mathbb{R}$  o  $k \in i\mathbb{R}$ . Si  $k = 0$  la solución general es  $a + bx$  y las condiciones de contorno se satisfacen si  $a + b = 0$ , por ello  $\lambda_0 = 0$  es autovalor y  $u_0(x) := 1 - x$  es una correspondiente autofunción. Si  $k \neq 0$  entonces la solución general es  $a \cos(kx) + b \sin(kx)$ . La existencia de soluciones no triviales cumpliendo las condiciones de contorno o conduce a  $\begin{vmatrix} k & 1 \\ \sin k & \cos k \end{vmatrix} = 0$ ; esto, es la ecuación que determina los autovalores es

$$\tan k = k.$$

Obsérvese que  $k \in \mathbb{R}$ , ya que en el caso imaginario la ecuación es  $\tanh k = k$ , cuya única solución es  $k = 0$  y por tanto queda descartada. Por otra parte, las soluciones son de la forma  $\dots, -k_2, -k_1, 0, k_1, k_2$  y por ello buscamos tan sólo soluciones con  $k > 0$ . Los primeros diez autovalores son  $\lambda_1 = 20,19072856$ ,  $\lambda_2 = 59,67951595$ ,  $\lambda_3 = 118,8998692$ ,  $\lambda_4 = 197,8578111$ ,  $\lambda_5 = 296,5544121$ ,  $\lambda_6 = 414,9899843$ ,  $\lambda_7 = 553,1646459$ ,  $\lambda_8 = 711,0784498$ ,  $\lambda_9 = 888,7314224$  y  $\lambda_{10} = 1086,123579$ . Las autofunciones correspondientes se pueden escoger como

$$u_n(x) = \sin(k_n x) - k_n \cos(k_n x).$$

Por último, el desarrollo de  $u(x) := x \sin(\pi x)$  es

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n(x),$$

donde

$$c_n = \begin{cases} \frac{\int_0^1 (1-x)x \sin(\pi x) dx}{\int_0^1 (1-x)^2 dx}, & n = 0 \\ \frac{\int_0^1 (\sin(k_n x) - k_n \cos(k_n x)) x \sin(\pi x) dx}{\int_0^1 (\sin(k_n x) - k_n \cos(k_n x))^2 dx}, & n > 0, \end{cases}$$

esto es  $c_0 = \frac{12}{\pi^3}$  y

$$c_n = (-4\pi k_n^3 \sin(k_n) - 4\pi k_n^2 - 4\pi k_n \sin(k_n)) \times (k_n^7 + (-2\pi^2 - 1 + \sin^2(k_n))k_n^5 + (\pi^4 + 2\pi^2 + (-2\pi^2 + 1)\sin^2(k_n))k_n^3 + ((\pi^4 - 2\pi^2)(\sin^2(k_n) - \pi^4)k_n + \pi^4 \cos(k_n) \sin(k_n))^{-1} \text{ para } n > 0.$$

3. Sea la función  $u = u(x)$  definida por

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(x-y)^2}}{1+y^2} dy, \quad -\infty < x < \infty.$$

a) Determinar funciones  $f = f(x)$  y  $g = g(x)$  tales que  $u(x)$  se exprese como una convolución

$$u(x) = (f * g)(x).$$

b) Calcular la transformada de Fourier de  $u = u(x)$ .

**Resolución** Si escogemos las funciones  $f$  y  $g$  como las gaussianas y lorentzianas siguientes

$$f(x) = e^{-x^2}, \quad g(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

tenemos que

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y) dy = u.$$

Por tanto, teniendo en cuenta que por un lado

$$\mathcal{F}(f * g) = 2\pi\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$$

y por otro

$$\mathcal{F}(f) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-k^2/4}, \quad \mathcal{F}(g) = \frac{1}{2}e^{-|k|},$$

obtenemos que

$$\hat{u} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-k^2/4-|k|}.$$

### 2.9.3. Ejercicios

1. Determinar los productos escalares:

$$(u, v) = \int_{\bar{\Omega}} \bar{u}(x) v(x) \rho(x) d^n x,$$

correspondientes a los datos siguientes:

- 1)  $u(x) = x + ix^2$ ,  $v(x) = 1 - ix$ ,  $\bar{\Omega} = [0, 1]$ ,  $\rho(x) \equiv 1$ .
- 2)  $u(x) = e^{ix}$ ,  $v(x) = e^{2ix}$ ,  $\bar{\Omega} = [0, 2\pi]$ ,  $\rho(x) \equiv 1$ .
- 3)  $u(x) = x$ ,  $v(x) \equiv 1$ ,  $\bar{\Omega} = [0, +\infty)$ ,  $\rho(x) = e^{-x^2}$ .
- 4)  $u(x, y) = xy + ix^2y^2$ ,  $v(x, y) = 1 - ixy$ ,  $\bar{\Omega} = [0, 1] \times [0, 1]$ ,  $\rho(x, y) = x^2y^2$ .
- 5)  $u(x, y) = \exp(-(x^2 + y^2))$ ,  $v(x, y) = 1$ ,  $\bar{\Omega} = \mathbb{R}^2$ ,  $\rho(x, y) \equiv 1$ .

2. Probar que los conjuntos siguientes son ortogonales:

- 1)  $\{\sin(\omega n x), n \geq 1\}$  ( $\omega = \pi/l$ ) en  $[0, l]$  con  $\rho(x) \equiv 1$ .
- 2)  $\{\cos(\omega n x), n \geq 0\}$  ( $\omega = \pi/l$ ) en  $[0, l]$  con  $\rho(x) \equiv 1$ .
- 3)  $\{\sin(\omega_1 n_1 x) \cdot \sin(\omega_2 n_2 y) \cdot \sin(\omega_3 n_3 z), n_i \geq 1\}$  ( $\omega_i = \pi/l_i$ ) en  $[0, l_1] \times [0, l_2] \times [0, l_3]$  con  $\rho(x, y, z) \equiv 1$ .

3. Probar que si  $L_1$  y  $L_2$  son operadores simétricos sobre un cierto dominio  $D$ , entonces también son operadores simétricos sobre ese dominio todas las combinaciones lineales  $\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2$  con coeficientes reales  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ .

4. Probar que el operador  $L = -\frac{d^2}{dx^2}$  es simétrico sobre el dominio  $D$  de funciones de clase  $C^2$  en  $[a, b]$  tales que satisfacen uno de los siguientes tipos de condiciones de contorno:

- Condiciones separadas:

$$u(a) + \beta u'(a) = 0, \quad u(b) + \beta' u'(b) = 0,$$

donde  $\beta$  y  $\beta'$  son números reales dados ( $\rho(x) \equiv 1$ ).

■

$$u(b) = \alpha u(a) + \beta u'(a), \quad u'(b) = \gamma u(a) + \delta u'(a),$$

siendo  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  números reales tales que:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

5. Sea el operador  $L = -i\frac{d}{dx}$  sobre el dominio  $D$  de funciones de clase  $C^1$  en  $[a, b]$  tales que satisfacen la condición de contorno:

$$\alpha u(a) + \beta u(b) = 0,$$

siendo  $\alpha$  y  $\beta$  números complejos dados. Probar que  $L$  es simétrico si y solo si se verifica:

$$|\alpha| = |\beta|.$$

Determinar en tal caso el espectro y las autofunciones de  $L$ .



6. Desarrollar en serie de Fourier de senos la función:

$$u(x) \equiv 1,$$

en el intervalo  $[0, l]$ . Analizar si se puede derivar el desarrollo término a término. Determinar también el desarrollo en cosenos de esta función.

7. Sea la función

$$u(x) = x.$$

- Hallar su desarrollo en senos sobre el intervalo  $[0, l]$ .
- Hallar su desarrollo en cosenos sobre el intervalo  $[0, l]$ .
- Hallar su desarrollo en senos y cosenos sobre el intervalo  $[-l, l]$ .

8. Determinar la serie de Fourier de senos y cosenos de la función:

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Determinar el valor que toma la serie en  $x = 1$ .

9. Sea el operador  $Lu = \frac{d^2 u}{dx^2} - 2u$  sobre el dominio de funciones de clase  $C^2$  en  $[0, 1]$  tales que

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0.$$

Determinar su espectro y sus autofunciones.

10. Determinar la serie de Fourier de senos y cosenos de la función:

$$u(x) = \exp(ix),$$

sobre el intervalo  $[0, \pi]$ .

11. Considérese el subespacio lineal  $\mathcal{D} \subset C^\infty([-1, 1])$  generado por las funciones

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad n \geq 0.$$

- a) Probar que  $T_n$  es un polinomio de grado  $n$ . (Los polinomios  $T_n$  se conocen como polinomios de Chebyshev.)
- b) Probar que  $\{T_n\}_{n=0}^\infty$  forma un conjunto ortogonal en  $[-1, 1]$  con función peso  $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

12. Sean  $f, g$  funciones periódicas de período  $2\pi$  que admiten un desarrollo de Fourier con coeficientes  $c_n(f)$  y  $c_n(g)$  en la base de exponenciales sobre el intervalo  $[-\pi, \pi]$ . La *convolución*  $f * g$  se define como

$$(f * g)(x) \equiv \int_{-\pi}^{\pi} f(x - y)g(y) \, dy.$$

- a) Probar que  $f * g = g * f$ .

b) Si  $f * g$  admite un desarrollo de Fourier, probar que se cumple la relación

$$c_n(f * g) = 2\pi c_n(f)c_n(g).$$

13. Determinar el desarrollo de Fourier de cosenos de la función  $u(x) = x^2$  en el intervalo  $[0, l]$ . Utilizar la identidad de Parseval para hallar la suma de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^4$ .

14. Sabiendo que

$$\int_0^1 x P_{2n}(x) dx = (-1)^{n-1} \frac{(2n-2)!}{2^{2n}(n-1)!(n+1)!}, \quad n \geq 1,$$

hallar el desarrollo de  $|x|$  en serie de polinomios de Legendre, en el intervalo  $[-1, 1]$ .

15. a) Probar a partir de la fórmula de Rodrigues que los polinomios de Legendre verifican  $P_l(1) = 1$ .

b) Probar la identidad:

$$(1 - 2tx + t^2)^{-1/2} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)t^l,$$

para  $|x| \leq 1$  y  $|t| < 1$ . (Ayuda: la *función generatriz*  $g(t, x) \equiv (1 - 2tx + t^2)^{-1/2}$  es función analítica de  $t$  para  $|x| \leq 1$  y  $|t| < 1$ , y satisface la ecuación diferencial  $((1 - x^2)g_x)_x + t(tg)_{tt} = 0$ . Introduciendo su desarrollo en serie de potencias de  $t$  en esta ecuación se deduce que los coeficientes del desarrollo verifican la ecuación de Legendre.)

c) Probar que los polinomios de Legendre verifican la relación de recurrencia

$$(l+1)P_{l+1}(x) - (2l+1)xP_l(x) + lP_{l-1}(x) = 0, \quad l \geq 0, \quad P_{-1}(x) \equiv 0.$$

16. Considérese el espacio  $\mathcal{S} = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) : \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^\alpha \varphi^{(\beta)}(x)| < \infty, \alpha, \beta \in \mathbb{N}\}$ . Sean

$$\langle x^2 \rangle_\varphi \equiv \frac{\|x\varphi\|^2}{\|\varphi\|^2}, \quad \langle k^2 \rangle_{\hat{\varphi}} \equiv \frac{\|k\hat{\varphi}\|^2}{\|\hat{\varphi}\|^2}, \quad \hat{\varphi} \equiv F(\varphi).$$

Probar que para cualquier  $\varphi \in \mathcal{S}$  se verifica la siguiente versión del “Principio de Incertidumbre”:

$$\langle x^2 \rangle_\varphi \langle k^2 \rangle_{\hat{\varphi}} \geq \frac{1}{4}.$$

17. Resolver mediante la transformada de Fourier la ecuación del calor en una dimensión espacial con un término de tipo convectivo, dada por

$$u_t = a u_{xx} + \mu u_x, \quad -\infty < x < \infty, \quad a > 0, \mu \in \mathbb{R},$$

con la condición inicial  $u(x, 0) = \phi(x) \in \mathcal{S}$ .

# CAPÍTULO 3

## Métodos de separación de variables y desarrollo en autofunciones

**A**BORDAMOS en este tercer capítulo dos de las técnicas más fructíferas a la hora de resolver EDP lineales. La separación de variables y el desarrollo en autofunciones. Comenzamos presentando la técnica de separación de variables para problemas de contorno homogéneos de forma general para después aplicarla a ejemplos concretos, tratando en detalle diversos problemas físicos. Posteriormente, analizamos el esquema del desarrollo en autofunciones para resolver problemas de condiciones iniciales y de contorno no homogéneos. Finalizamos tratando problemas de contorno en electrostática y mecánica de fluidos. La estructura del tema es como sigue:

1. El método de separación de variables
2. La ecuación de Helmholtz en coordenadas cartesianas
3. La ecuación de Helmholtz en coordenadas cilíndricas
4. La ecuación de Helmholtz en coordenadas esféricas
5. El método del desarrollo en autofunciones
6. Problemas de contorno en electrostática y mecánica de fluidos

### 3.1. El método de separación de variables

Este es uno de los métodos más antiguos para encontrar soluciones particulares de EDP lineales. Básicamente permite reducir el problema de la búsqueda de soluciones de cierto tipo de EDP a problemas de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias. Por otro lado, constituye el elemento básico de los métodos de desarrollo en autofunciones para determinar soluciones de problemas de contorno y/o de condiciones iniciales.

### 3.1.1. Operadores diferenciales separables

Sea  $L$  un operador diferencial lineal actuando sobre funciones diferenciables en un subconjunto  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$

$$Lu := \sum_{\alpha} a_{\alpha}(x) D^{\alpha} u.$$

Para la discusión siguiente es conveniente denotar  $L$  en la forma

$$L = L\left(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}; \frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}\right),$$

que indica que  $L$  efectúa derivaciones con respecto a las variables  $(x_0, \dots, x_{n-1})$  y que sus coeficientes  $a_{\alpha} = a_{\alpha}(x)$  dependen de esas variables.

operador diferen-  
cial separable

**DEFINICIÓN 3.1.1.** Se dice que  $L$  es un operador separable respecto de la variable  $x_0$  si puede descomponerse en suma de dos operadores

$$L = A + B,$$

de la forma

$$A = A\left(x_0; \frac{\partial}{\partial x_0}\right), \quad B = B\left(x_1, \dots, x_{n-1}; \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}\right).$$

Es decir  $A$  solo efectúa derivaciones respecto de  $x_0$  y sus coeficientes solo pueden depender de  $x_0$ , mientras que  $B$  deriva solo respecto de las variables  $(x_1, \dots, x_{n-1})$  y sus coeficientes solo pueden depender de  $(x_1, \dots, x_{n-1})$ .



### Ejemplos

#### 1. El operador

$$Lu = xu_x + yu_{yy} + yzu_z + x^2u,$$

es separable respecto de  $x$  ya que  $L = A + B$  siendo

$$A\left(x; \frac{\partial}{\partial x}\right) = x \frac{\partial}{\partial x} + x^2, \quad B\left(y, z; \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = y \frac{\partial^2}{\partial y^2} + yz \frac{\partial}{\partial z}.$$

#### 2. El operador Laplaciano

$$Lu := \Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz},$$

es separable respecto de cualquiera de sus tres variables  $(x, y, z)$ .

#### 3. El operador d'Alembertiano que aparece en la ecuación de ondas en 1+3 dimensiones:

$$Lu := u_{tt} - c^2 \Delta u,$$

es separable respecto de cualquiera de sus cuatro variables  $(t, x, y, z)$ .

4. El operador que aparece en la ecuación de Schrödinger en 1+3 dimensiones:

$$Lu := i\hbar u_t + \frac{\hbar^2}{2m}\Delta u + q(x, y, z)u,$$

es separable respecto de la variable  $t$ . Será separable respecto de la variable  $x$  solo cuando la función  $q = q(x, y, z)$  sea de la forma  $q = u(x) + v(y, z)$ . Análogamente para las variables  $y$  y  $z$ .

### 3.1.2. Soluciones de EDP homogéneas

El método de separación de variables (MSV) se aplica a EDP lineales homogéneas en las que el operador  $L$  es separable. Puede resumirse en el siguiente enunciado

separación  
de  
variables  
en  
ecuaciones  
homogéneas

**Teorema 3.1.2.** *Dada una EDP homogénea de la forma*

$$A\left(x_0; \frac{\partial}{\partial x_0}\right)u + B\left(x_1, \dots, x_{n-1}; \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}\right)u = 0, \quad (3.1)$$

*todo par de funciones*

$$v = v(x_0), \quad w = w(x_1, \dots, x_{n-1}),$$

*que verifiquen el sistema de ecuaciones*

$$Av = \lambda v, \quad Bw = -\lambda w, \quad (3.2)$$

*con  $\lambda \in \mathbb{C}$  arbitrario, determinan una solución de (3.1) dada por*

$$u = v(x_0)w(x_1, \dots, x_{n-1}).$$

*Demostración.* Dadas dos funciones no nulas  $v = v(x_0)$  y  $w = w(x_1, \dots, x_{n-1})$  verificando (3.2), por la forma de los operadores  $A$  y  $B$  es claro que

$$A(vw) = w \cdot Av = \lambda vw, \quad B(vw) = v \cdot Bw = -\lambda vw,$$

por tanto la función producto  $u = vw$  satisface

$$Au + Bu = \lambda u - \lambda u = 0.$$

□

### Observaciones

1. La utilidad del MSV radica en que reduce el problema de la búsqueda de soluciones de una EDP (3.1)

$$Au + Bu = 0,$$

con  $n$  variables independientes  $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$  a un sistema (3.2) que consta de una ecuación diferencial ordinaria

$$Av = \lambda v,$$

y una EDP

$$Bw + \lambda w = 0,$$

con  $(n - 1)$  variables independientes  $(x_1, \dots, x_{n-1})$ , que es a su vez otra EDP lineal homogénea. Si a esta EDP podemos aplicarle el MSV la reduciremos a una ecuación diferencial ordinaria y una EDP lineal homogénea con  $n - 2$  variables independientes. Iterando el proceso concluimos que si es posible aplicar el MSV  $n - 1$  veces habremos conseguido reducir la EDP original a un sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales ordinarias. Cuando esto es posible decimos que la EDP es *resoluble mediante el MSV*.

2. Las funciones  $v$  y  $w$  que aparecen en el MSV son autofunciones de los operadores  $A$  y  $B$  con autovalores  $\lambda$  y  $-\lambda$  respectivamente.
3. Cuando aplicamos el MSV suponemos que  $\lambda$  es un parámetro complejo arbitrario. Luego las soluciones  $u$  obtenidas dependerán de ese parámetro  $\lambda$ . En una EDP con  $n$  variables independientes resoluble mediante el MSV deberemos aplicar el MSV  $n - 1$  veces, luego las soluciones obtenidas dependerán de los  $n - 1$  parámetros  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$  introducidos por el MSV. Es decir el MSV proporciona una familia  $(n - 1)$ -paramétrica de soluciones

$$u_{\boldsymbol{\lambda}} = u_{\boldsymbol{\lambda}}(x).$$

4. Como la EDP (3.1)

$$Au + Bu = 0,$$

es una EDP lineal y homogénea, dada una familia cualquiera de soluciones,

$$\{u_{\boldsymbol{\lambda}} = u_{\boldsymbol{\lambda}}(x), \boldsymbol{\lambda} \in \Lambda\},$$

cualquier combinación lineal de los elementos de la familia

$$u(x) = \sum_{n=1}^N c_n u_{\boldsymbol{\lambda}_n}(x),$$

es también solución de la EDP. Bajo *condiciones apropiadas* también podremos construir soluciones mediante *combinaciones lineales generalizadas* del tipo serie infinita

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_{\boldsymbol{\lambda}_n}(x),$$

o una expresión integral

$$u(x) = \int_{\Lambda_0} c(\boldsymbol{\lambda}) u_{\boldsymbol{\lambda}}(x) d^{n-1} \boldsymbol{\lambda}, \quad \Lambda_0 \subset \Lambda,$$

o incluso una superposición de ambas formas

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_{\boldsymbol{\lambda}_n}(x) + \int_{\Lambda_0} c(\boldsymbol{\lambda}) u_{\boldsymbol{\lambda}}(x) d^{n-1} \boldsymbol{\lambda}.$$

Esta propiedad permite bajo condiciones favorables generar la solución general de (3.1). Para ello basta con que la familia de soluciones  $\{u_{\boldsymbol{\lambda}}, \boldsymbol{\lambda} \in \Lambda\}$  contenga un conjunto completo de funciones.

### 3.1.3. Soluciones de problemas de contorno homogéneos

El MSV puede también aplicarse en situaciones en que el problema sea una EDP lineal homogénea junto con una serie de condiciones

operadores de  
frontera separa-  
bles

$$\begin{cases} Lu = 0, \\ l_i(u) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \end{cases}$$

**DEFINICIÓN 3.1.3.** Se dice que un operador de frontera  $l$  opera solo sobre la variable  $x_0$  si para todo par de funciones  $v = v(x_0)$  y  $w = w(x_1, \dots, x_{n-1})$  se verifica

$$l(vw) = w(x_1, \dots, x_{n-1})l(v).$$

Análogamente, se dice que  $l$  opera sólo sobre las variables  $(x_1, \dots, x_{n-1})$  cuando para todo par de funciones  $v = v(x_0)$  y  $w = w(x_1, \dots, x_{n-1})$  se satisface que

$$l(vw) = v(x_0)l(w).$$

#### Ejemplos

1. Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , los funcionales

$$l(u) = u|_{x=1}, \quad l(u) = u_x|_{x=1},$$

solo operan sobre la variable  $x$ . Sin embargo

$$l(u) = (u_x + u_y)|_{x=1}, \quad l(u) = u|_{x+y=3},$$

solo operan sobre las variables  $(x, y)$ .

2. Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  y  $\Gamma$  la circunferencia de radio  $r = 1$ , el funcional

$$l(u) = u|_{\Gamma},$$

no es separable ni respecto de  $x$  ni de  $y$ . Sin embargo si tomamos coordenadas polares  $(r, \theta)$ , el funcional es separable respecto de la variable  $r$  ya que

$$l(u) = u|_{r=1}.$$

El MSV puede aplicarse a problemas de contorno homogéneos cuando la EDP es separable y las condiciones de contorno son apropiadas. Podemos resumir la situación propicia en el siguiente enunciado.

**Teorema 3.1.4.** *Dado un problema de contorno de la forma*

$$A\left(x_0; \frac{\partial}{\partial x_0}\right)u + B\left(x_1, \dots, x_{n-1}; \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}\right)u = 0, \quad (3.3)$$

$$a_i(u) = 0, \quad i = 1, \dots, r, \quad (3.4)$$

$$b_j(u) = 0, \quad j = 1, \dots, s, \quad (3.5)$$

siendo  $a_i$  y  $b_j$  operadores de frontera que operan solo sobre las variables  $x_0$  y  $(x_1, \dots, x_{n-1})$  respectivamente. Entonces todo par de funciones

$$v = v(x_0), \quad w = w(x_1, \dots, x_{n-1}),$$

que verifiquen los sistemas de ecuaciones

$$\begin{cases} Av = \lambda v, \\ a_i(v) = 0, \quad i = 1, \dots, r, \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\begin{cases} Bw = -\lambda w, \\ b_j(w) = 0, \quad j = 1, \dots, s, \end{cases} \quad (3.7)$$

con  $\lambda \in \mathbb{C}$ , determinan una solución de (3.3)-(3.4)-(3.5) dada por

$$u = v(x_0)w(x_1, \dots, x_{n-1}).$$

*Demostración.* Lo único que resta por demostrar respecto del teorema anterior es que si  $v = v(x_0)$  y  $w = w(x_1, \dots, x_{n-1})$  satisfacen las condiciones de contorno de (3.6) y (3.7) entonces  $u = vw$  satisface las de (3.4)-(3.5). Pero esta propiedad es consecuencia inmediata de las propiedades de los operadores de frontera  $a_i$  y  $b_j$

$$a_i(u) = a_i(vw) = wa_i(v) = 0, \quad b_j(u) = b_j(vw) = vb_j(w) = 0.$$

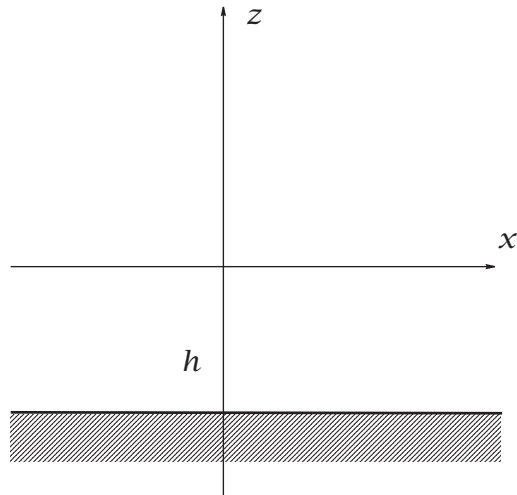
□



### Ejemplos

1. Sea  $\mathbf{v}(x, z)$  el campo de velocidades de un fluido estacionario moviéndose en el plano  $XZ$  por encima de un fondo impenetrable a una profundidad  $z = -h$ .





El potencial de velocidades del fluido  $u = u(x, z)$  está definido por la relación

$$\mathbf{v} = \nabla u,$$

y satisface el problema de contorno

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{zz} = 0, \\ u_z|_{z=-h} = 0. \end{cases}$$

Podemos aplicar el MSV, buscando soluciones de la forma  $u = v(z)w(x)$  donde

$$v_{zz} = \lambda v, \quad v_z|_{z=-h} = 0,$$

y

$$w_{xx} = -\lambda w.$$

Introduciendo el cambio de parámetro  $\lambda = k^2$ , se obtiene que la solución de la ecuación ordinaria para  $v$  es

$$v(z) = Ae^{kz} + Be^{-kz},$$

imponiendo la condición de contorno sobre  $v$

$$k(Ae^{-kh} - Be^{kh}) = 0, \quad B = Ae^{-2kh}.$$

Es decir

$$v(z) = A(e^{kz} + e^{-2kh}e^{-kz}) = 2Ae^{-kh} \cosh k(z + h).$$

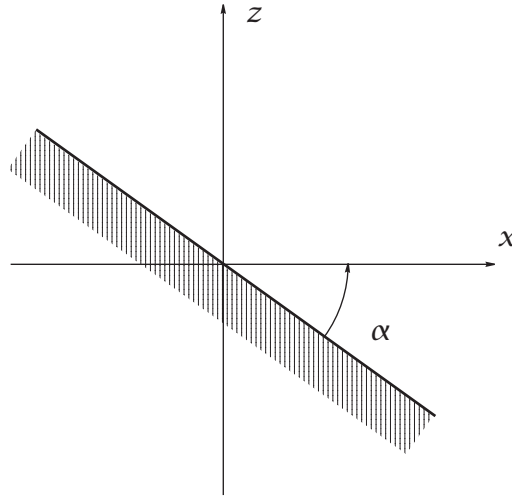
Por otra parte, resolviendo la ecuación ordinaria para  $w$

$$w(x) = Ce^{ikx} + De^{-ikx}.$$

De esta forma hemos determinado la siguiente familia de soluciones

$$u(x, z) = 2\tilde{A}(Ce^{ikx} + De^{-ikx}) \cosh k(z + h), \quad \tilde{A} \in \mathbb{C}.$$

2. Es muy frecuente encontrarse con problemas de contorno en que el MSV no es aplicable inicialmente, pero que si lo sea al efectuar un cambio apropiado de variables independientes. Por ejemplo, consideremos de nuevo el problema del campo de velocidades de un fluido estacionario moviéndose en el plano  $XZ$  por encima de un fondo impenetrable, pero supongamos ahora que este fondo no es horizontal sino que es descrito por una recta de ecuación  $z = -mx$ ,  $m = \tan \alpha$ .



separación de variables y cambios de coordenadas

El potencial de velocidades del fluido  $u = u(x, z)$  satisface entonces el problema de contorno

$$u_{xx} + u_{zz} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{z=-mx} = 0.$$

Teniendo en cuenta que un vector normal unitario al fondo es

$$\mathbf{n} = \sin \alpha \mathbf{i} + \cos \alpha \mathbf{k}$$

el problema de contorno se transforma en

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{zz} = 0, \\ (\sin \alpha u_x + \cos \alpha u_z) \Big|_{z=-mx} = 0. \end{cases}$$

Esta claro que la condición de contorno no permite la aplicación directa del MSV. Sin embargo, si introducimos el cambio de coordenadas

$$x' = \cos \alpha x - \sin \alpha z, \quad z' = \sin \alpha x + \cos \alpha z,$$

el problema se reduce a

$$\begin{cases} u_{x'x'} + u_{z'z'} = 0, \\ u_z \Big|_{z'=0} = 0, \end{cases}$$

al cual sí podemos aplicar el MSV, y como vimos en el ejemplo anterior

$$u(x', z') = 2Ae^{-kh}(Ce^{ikx'} + De^{-ikx'}) \cosh kz'.$$

Para escribir la solución en términos de las variables  $(x, z)$  basta introducir en  $u$  las expresiones de  $(x', z')$  en función de  $(x, z)$ .

### 3.1.4. El MSV y las ecuaciones de la física matemática

El MSV está ligado a la resolución de problemas del tipo

$$\left\{ \begin{array}{l} a \frac{\partial^N u}{\partial t^N} - Lu = f, \quad t \in (a, b), \quad \mathbf{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n, \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^i u}{\partial t^i} \Big|_{t=t_0} = f_i(\mathbf{x}), \quad i = 1, \dots, N-1, \\ l_j(u) = g_j(t, \mathbf{x}), \quad j = 1, \dots, s, \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (3.8)$$

separación de variables en Física Matemática

siendo  $L$  un operador de Sturm-Liouville en las variables  $\mathbf{x}$ , y donde  $l_j$  son serie de operadores de frontera espaciales. Estos problemas surgen de manera natural en electromagnetismo, mecánica de medios continuos o en mecánica cuántica. Es de observar que la EDP es no homogénea y que el operador correspondiente es separable respecto de la variable  $t$ . Como veremos posteriormente, el método de resolución relevante en este contexto es el **método de desarrollo en autofunciones** que se basa en la construcción de la solución a través de familias de soluciones del problema espectral asociado

$$\left\{ \begin{array}{l} Lw = \lambda w, \\ l_j(w) = 0, \quad j = 1, \dots, s. \end{array} \right.$$

Estas autofunciones de  $L$  determinan las denominadas **ondas estacionarias** del problema físico descrito por (3.8), que son las funciones de la forma

ondas estacionarias

$$e^{-i\omega t} w(\mathbf{x}), \quad \omega \in \mathbb{R},$$

que verifican la EDP de (3.8). Esta condición determina la **frecuencia**  $\omega$  de la onda, ya que al sustituir la función en la EDP se obtiene

frecuencia

$$a(-i\omega)^N e^{-i\omega t} w = \lambda e^{-i\omega t} w,$$

simplificando se obtiene la **relación de dispersión**

relación de dispersión

$$a(-i\omega)^N = \lambda,$$

que relaciona  $\omega$  con  $\lambda$ . Solo en el caso en que existan soluciones  $\omega$  reales de esta relación podemos hablar de ondas estacionarias en el fenómeno físico correspondiente. Si tomamos  $L = -\Delta$  la separación de variables nos conduce a la **ecuación de Helmholtz**

ecuación de Helmholtz

$$\Delta w + \lambda w = 0.$$

Ecuación que estudiaremos en detalle en breve.



#### Ejemplos

1. Consideremos un problema típico con la ecuación de ondas en 1 + 1 dimensiones

$$\left\{ \begin{array}{l} c^{-2} u_{tt} = u_{xx}, \quad t \in (a, b), \quad x \in (0, l), \\ \left\{ \begin{array}{l} u \Big|_{t=t_0} = f_1(x), \\ u_t \Big|_{t=t_0} = f_2(x), \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} u \Big|_{x=0} = g_1(t), \\ u \Big|_{x=l} = g_2(t). \end{array} \right. \end{array} \right.$$

El problema espectral asociado es

$$w_{xx} = \lambda w, \quad w(0) = 0, \quad w(l) = 0.$$

Las soluciones son

$$w_n(x) = \sin k_n x, \quad k_n = \frac{\pi}{l} n, \quad n = 1, 2, \dots$$

con  $\lambda_n = -k_n^2$ . La relación de dispersión es

$$c^{-2}(-i\omega)^2 = -k^2,$$

luego las ondas estacionarias del problema son

$$u_n(t, x) = e^{-i\omega_n t} \sin k_n x, \quad \omega_n = \pm c k_n.$$

2. Consideremos ahora un problema con la ecuación de Schrödinger en 1 + 1 dimensiones

$$\left\{ \begin{array}{l} i \hbar u_t = -\frac{\hbar^2}{2m} u_{xx}, \quad t \in (a, b), \quad x \in (0, l), \\ u|_{t=t_0} = f_1(x), \\ \left\{ \begin{array}{l} u|_{x=0} = g_1(t), \\ u|_{x=l} = g_2(t). \end{array} \right. \end{array} \right.$$

El problema espectral asociado es

$$-\frac{\hbar^2}{2m} w_{xx} = \lambda w, \quad w(0) = 0, \quad w(l) = 0.$$

Las soluciones son

$$w_n(x) = \sin k_n x, \quad k_n = \frac{\pi}{l} n, \quad n \geq 1,$$

donde

$$\lambda_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m}.$$

La relación de dispersión es

$$\omega = \frac{\hbar k^2}{2m},$$

luego las ondas estacionarias del problema son

$$u_n(t, x) = e^{-i\omega_n t} \sin k_n x, \quad \omega_n = \frac{\hbar k_n^2}{2m}.$$

En las próximas tres secciones vamos a resolver la ecuación de Helmholtz en distintas situaciones y a analizar diferentes aplicaciones. Estudiaremos el problema en diferentes sistemas de coordenadas: cartesianas, polares, cilíndricas y esféricas. También veremos distintas aplicaciones en fluidos y mecánica cuántica.

### 3.2. La ecuación de Helmholtz en coordenadas cartesianas

Vamos pues a considerar la resolución de

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + k^2 u = 0, \quad k \in \mathbb{C}.$$

Aplicando el MSV, buscamos una solución de la forma

$$u(x, y, z) = X(x)w(y, z),$$

tal que

$$\begin{cases} \frac{d^2 X}{dx^2} = \lambda X, \\ w_{yy} + w_{zz} + k^2 w = -\lambda w, \end{cases}$$

donde  $\lambda = -k_1^2 \in \mathbb{C}$ . Separando variables de nuevo, buscamos una solución de la segunda ecuación de la forma

$$w(y, z) = Y(y)Z(z)$$

tal que

$$\begin{cases} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \lambda' Y, \\ \frac{d^2 Z}{dz^2} + (k^2 - k_1^2)Z = -\lambda' Z \end{cases}$$

donde  $\lambda' = -k_2^2 \in \mathbb{C}$ . Llamando  $k_3^2 = k^2 - k_1^2 - k_2^2$  vemos que la solución buscada tiene la forma

$$\begin{aligned} u_{k_1, k_2, k_3}(x, y, z) &= X_{k_1}(x)Y_{k_2}(y)Z_{k_3}(z), \\ \begin{cases} X_{k_1}(x) = a_1 e^{i k_1 x} + b_1 e^{-i k_1 x}, \\ Y_{k_2}(y) = a_2 e^{i k_2 y} + b_2 e^{-i k_2 y}, \\ Z_{k_3}(z) = a_3 e^{i k_3 z} + b_3 e^{-i k_3 z}. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.9)$$

con

$$k^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2.$$

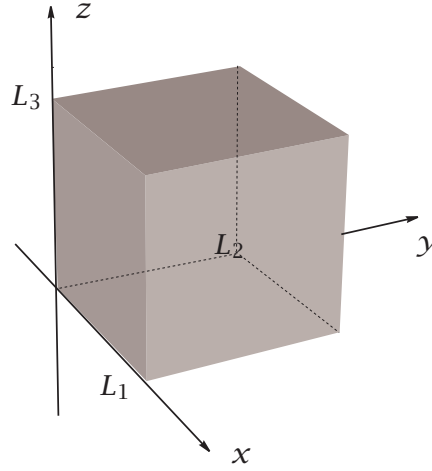
Las condiciones de contorno a las que se adecúan estas soluciones son aquellas en las que la frontera están formada por planos paralelos a los planos coordenados. Pasamos a analizar ejemplos de este tipo.

#### 3.2.1. Partícula cuántica en una caja impenetrable

Los estados estacionarios de una partícula de energía  $E$  en una caja impenetrable de lados  $L_1, L_2$  y  $L_3$  se describe mediante el siguiente problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta u = Eu, \\ u|_{\text{paredes}} = 0. \end{cases}$$

separación de variables ecuación de Helmholtz en cartesianas



La EDP es una ecuación de Helmholtz con  $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$  y la condición de contorno se desglosa en las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} u(0, y, z) &= 0, \\ u(L_1, y, z) &= 0, \\ u(x, 0, z) &= 0, \\ u(x, L_2, z) &= 0, \\ u(x, y, 0) &= 0, \\ u(x, y, L_3) &= 0. \end{aligned}$$

Impongamos estas condiciones de contorno sobre  $u_{k_1, k_2, k_3}(x, y, z) = X_{k_1}(x)Y_{k_2}(y)Z_{k_3}(z)$  de (3.9). Para  $X_{k_1}$  se tendrá

$$\begin{aligned} a_1 + b_1 &= 0, \\ a_1 e^{ik_1 L_1} + b_1 e^{-ik_1 L_1} &= 0 \end{aligned}$$

que implica que

$$a_1 = -b_1, \quad k_1 = \frac{\pi}{L_1} n_1, \quad n_1 \in \mathbb{Z}$$

y por tanto

$$X_{k_1}(x) = A_1 \sin \frac{\pi n_1}{L_1} x.$$

Un procedimiento análogo en las variables  $y, z$  nos permite concluir que

$$u_{k_1, k_2, k_3}(x, y, z) = a \sin \left( \frac{\pi n_1}{L_1} x \right) \sin \left( \frac{\pi n_2}{L_2} y \right) \sin \left( \frac{\pi n_3}{L_3} z \right), \quad n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}.$$

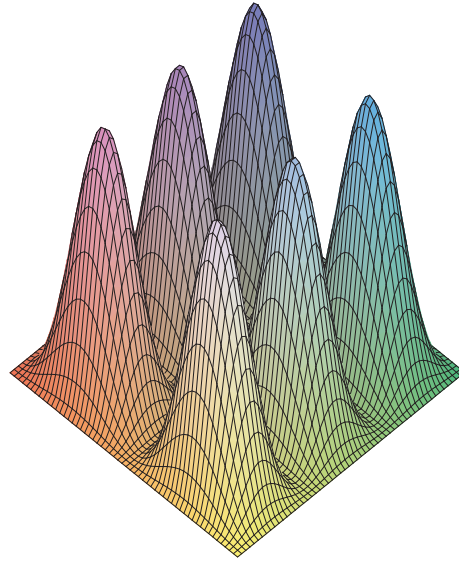
El parámetro  $k^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$  es entonces de la forma

$$k^2 = \pi^2 \left( \frac{n_1^2}{L_1^2} + \frac{n_2^2}{L_2^2} + \frac{n_3^2}{L_3^2} \right)$$

y se obtiene así la siguiente cuantificación de la energía

$$E_{n_1, n_2, n_3} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \left( \frac{n_1^2}{L_1^2} + \frac{n_2^2}{L_2^2} + \frac{n_3^2}{L_3^2} \right).$$

Podemos considerar una versión del mismo problema en dos dimensiones haciendo  $z = 0$ . Representamos a continuación la función  $|u(x, y)|^2$  que representa la densidad de probabilidad de presencia de la partícula en el punto  $(x, y)$  del rectángulo  $[0, 2] \times [0, 1]$  con  $n_1 = 3$  y  $n_2 = 2$



### 3.2.2. Partícula cuántica en una caja con condiciones periódicas

Imponemos ahora condiciones de contorno periódicas, esto es:

$$\begin{aligned} u(0, y, z) &= u(L_1, y, z), \\ u_x(0, y, z) &= u_x(L_1, y, z), \\ u(x, 0, z) &= u(x, L_2, z), \\ u_y(x, 0, z) &= u_y(x, L_2, z), \\ u(x, y, 0) &= u(x, y, L_3), \\ u_z(x, y, 0) &= u_z(x, y, L_3), \end{aligned}$$

Estas condiciones aplicadas a las autofunciones  $u_{k_1, k_2, k_3}$  de (3.9) nos llevan a

$$\begin{aligned} a_i + b_i &= a_i e^{ik_i L_i} + b_i e^{-ik_i L_i}, \\ a_i - b_i &= a_i e^{ik_i L_i} - b_i e^{-ik_i L_i} \end{aligned}$$

con  $i = 1, 2$  y  $3$ . Para que estos sistemas lineales posean soluciones no triviales  $(a_i, b_i) \neq (0, 0)$  debemos exigir que

$$\begin{vmatrix} 1 - e^{ik_i L_i} & 1 - e^{-ik_i L_i} \\ 1 - e^{ik_i L_i} & -(1 - e^{-ik_i L_i}) \end{vmatrix} = 0;$$

esto es

$$(e^{ik_i L_i/2} - e^{-ik_i L_i/2})^2 = 0,$$

condición que se satisface idénticamente cuando

$$k_i = \frac{2\pi}{L_i} n_i, \quad n_i \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, 2, 3.$$

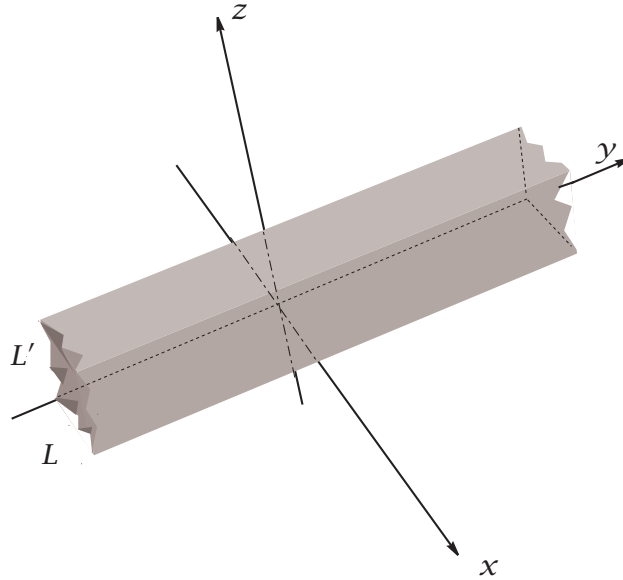
Las energías posibles son

$$E_{n_1, n_2, n_3} = \frac{\hbar^2}{2m} 4\pi^2 \left( \frac{n_1^2}{L_1^2} + \frac{n_2^2}{L_2^2} + \frac{n_3^2}{L_3^2} \right).$$

Para los valores hallados de  $k_i$ , las ecuaciones para  $a_i$  y  $b_i$  se verifican trivialmente, así que las soluciones  $u$  correspondientes son las funciones de (3.9).

### 3.2.3. Fluido en una tubería paralelepédica

El fluido en una tubería, modelada como el conjunto  $[0, L] \times \mathbb{R} \times [0, L'] \subset \mathbb{R}^3$ ,



tiene un potencial de velocidades  $u$  determinado por el siguiente problema de contorno de Neumann para la ecuación de Laplace

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ \left\{ \begin{array}{l} u_x(0, y, z) = 0, \\ u_x(L, y, z) = 0, \\ u_z(x, y, 0) = 0, \\ u_z(x, y, L') = 0. \end{array} \right. \end{cases}$$

Vamos pues a imponer sobre  $u_{k_1, k_2, k_3} = X_{k_1}(x)Y_{k_2}(y)Z_{k_3}(z)$  estas condiciones. Para la función  $X_{k_1} = a_1 e^{ik_1 x} + b_1 e^{-ik_1 x}$  tenemos

$$X'(0) = X'(L) = 0$$



que implica el sistema

$$\begin{aligned} a_1 - b_1 &= 0, \\ a_1 e^{ik_1 L} - b_1 e^{-ik_1 L} &= 0. \end{aligned}$$

La existencia de soluciones no triviales  $(a_1, b_1) \neq (0, 0)$  requiere

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ e^{ik_1 L} & -e^{-ik_1 L} \end{vmatrix} = 0,$$

esto es  $\sin(2k_1 L) = 0$ , luego

$$k_1 = \frac{\pi}{L} n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Como  $a_1 = b_1$  las autofunciones son

$$X_n(x) = \cos \frac{\pi}{L} n x.$$

Un análisis similar en la variable  $z$  lleva a

$$k_3 = \frac{\pi}{L'} n', \quad n' \in \mathbb{Z}$$

con autofunciones asociadas

$$Z_{n'}(z) = \cos \frac{\pi}{L'} n' z.$$

Para la variable  $y$  no tenemos condiciones de contorno que imponer, sin embargo, ahora estamos resolviendo la ecuación de Laplace; esto es la ecuación de Helmholtz con

$$k^2 = 0.$$

Por tanto, como  $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = k^2 = 0$  deducimos que

$$k_2 = \pm i \pi \sqrt{\frac{n^2}{L^2} + \frac{n'^2}{L'^2}},$$

y obtenemos las soluciones siguientes

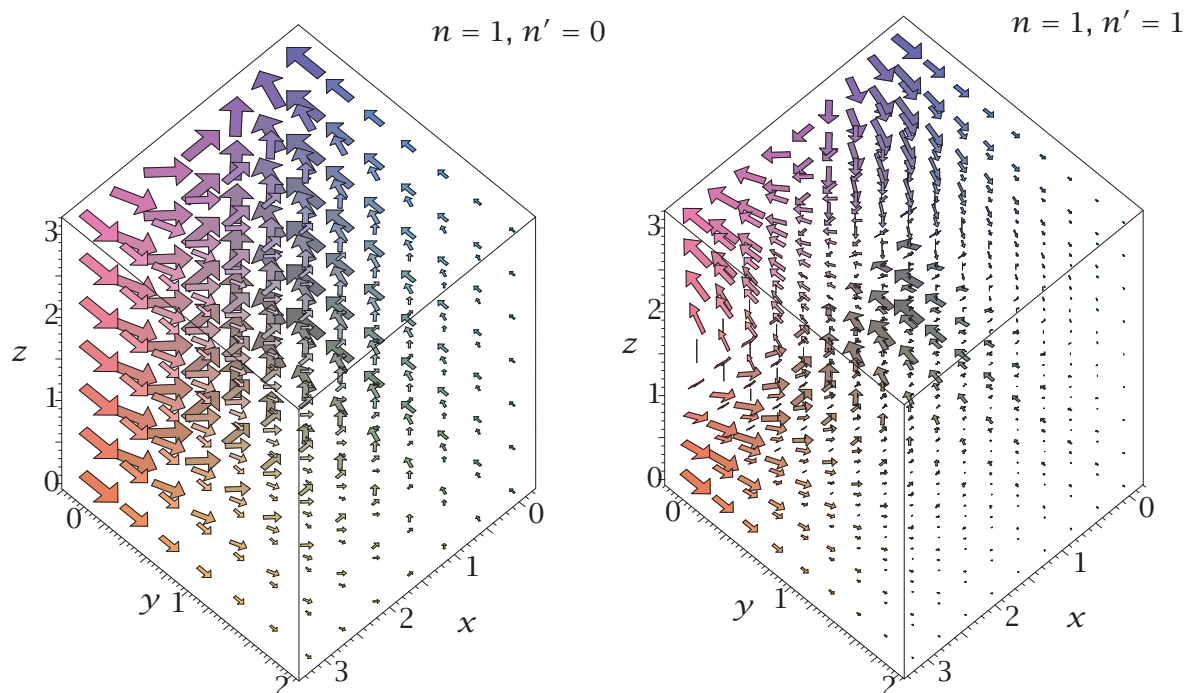
$$\cos \frac{\pi}{L} n x \cos \frac{\pi}{L'} n' z e^{\pm \pi \sqrt{\frac{n^2}{L^2} + \frac{n'^2}{L'^2}} y}, \quad n, n' \in \mathbb{Z}.$$

A continuación ilustramos los campos de velocidades para  $L = L' = \pi$  correspondientes a  $n = 1, n' = 0$

$$\mathbf{v}_{10}(x, y, z) = -\sin x e^{-y} \mathbf{i} - \cos x e^{-y} \mathbf{j}$$

y a  $n = 1, n' = 1$

$$\mathbf{v}_{11}(x, y, z) = -\sin x \cos z e^{-\sqrt{2}y} \mathbf{i} - \sqrt{2} \cos x \cos z e^{-\sqrt{2}y} \mathbf{j} - \cos x \sin z e^{-\sqrt{2}y} \mathbf{k}$$

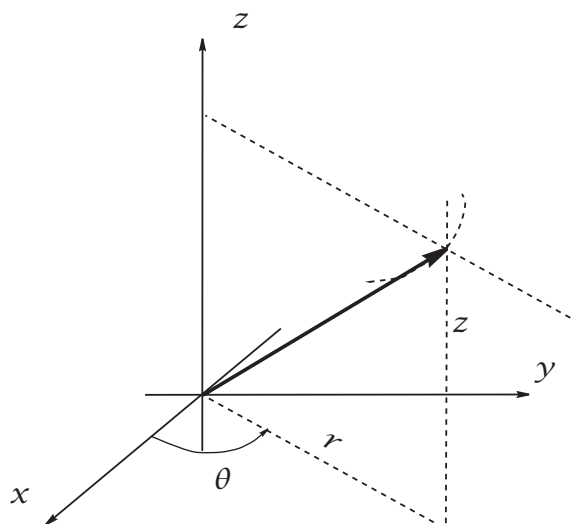


### 3.3. La ecuación de Helmholtz en coordenadas cilíndricas

separación de variables  
ecuación  
de Helmholtz en  
cilíndricas

Cuando se usan coordenadas cilíndricas

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta, \\y &= r \sin \theta, \\z &= z,\end{aligned}$$



la ecuación de Helmholtz se escribe como sigue

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + u_{zz} + k^2u = 0.$$

Separamos variables a través de la factorización

$$u(r, \theta, z) = V(r, \theta)Z(z)$$

que transforma la ecuación de Helmholtz en

$$\begin{aligned} Z'' + k^2Z &= \alpha^2Z, \\ r^2V_{rr} + rV_r + V_{\theta\theta} &= -\alpha^2r^2V. \end{aligned}$$

La solución de la primera EDO es

$$Z_\alpha(z) = Ae^{i\sqrt{k^2-\alpha^2}z} + Be^{-i\sqrt{k^2-\alpha^2}z}. \quad (3.10)$$

Para la segunda ecuación también podemos separar variables

$$V(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$$

para obtener las ecuaciones

$$\begin{aligned} r^2R'' + rR' + \alpha^2r^2R &= m^2R, \\ \Theta'' &= -m^2\Theta. \end{aligned}$$

La solución general de la segunda es

$$\Theta_m(\theta) = Ce^{im\theta} + De^{-im\theta}. \quad (3.11)$$

Queda pues analizar la ecuación para  $R$ , EDO que se conoce como *ecuación radial*. Para ésta se dan dos casos distintos. En primer lugar consideramos  $\alpha = 0$  y la correspondiente ecuación es

$$r^2R'' + rR' - m^2R = 0$$

cuya solución es

$$R_{\alpha=0,m}(r) = \begin{cases} c_1 \ln r + c_2 & m = 0, \\ c_1 r^m + c_2 r^{-m} & m \neq 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

Cuando  $\alpha \neq 0$ , realizando el cambio de variable  $\rho = \alpha r$ , la correspondiente EDO se reduce a

$$\rho^2 \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \rho \frac{dR}{d\rho} + (\rho^2 - m^2)R = 0,$$

que es la conocida ecuación de Bessel. Por tanto, la solución es

$$R_{\alpha,m}(r) = EJ_m(\alpha r) + FN_m(\alpha r). \quad (3.13)$$

### 3.3.1. Coordenadas polares

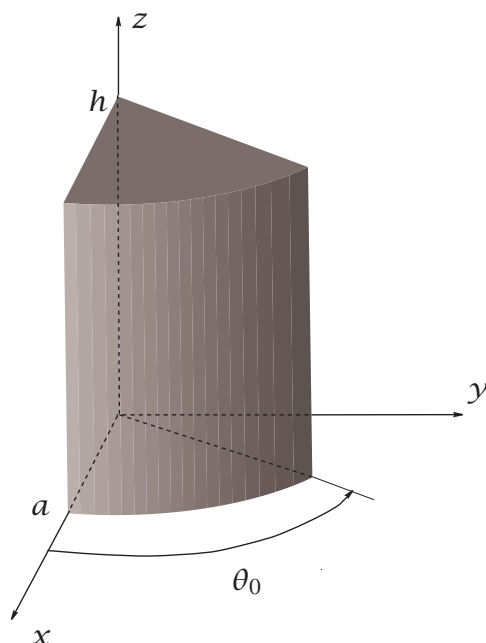
La ecuación del Helmholtz en dos dimensiones espaciales, escrita en coordenadas polares es

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + k^2u = 0.$$

Es la misma ecuación que aparece cuando en la ecuación de Helmholtz en cilíndricas buscamos soluciones que no dependen de la variable independiente  $z$ . Por ello, basta con hacer  $\alpha^2 = k^2$  en lo expuesto más arriba para obtener las soluciones correspondientes.

### 3.3.2. Partícula cuántica en una cuña cilíndrica impenetrable

Consideramos ahora una partícula cuántica encerrada en una cuña cilíndrica de radio  $a$ , altura  $h$  y con apertura de ángulo  $\theta_0$  tal como muestra la figura



Los estados estacionarios vienen descritos por las soluciones de cuadrado integrable del siguiente problema de contorno de Dirichlet

$$\begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2M}\Delta u = Eu, \\ u|_{\text{paredes}}=0 \end{cases}$$

que llamando

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2M}$$

escribimos como el siguiente problema de contorno para la ecuación de Helmholtz en coordenadas cilíndricas

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0, \\ \left\{ \begin{array}{l} u|_{r=a} = 0, \\ u|_{\theta=0} = 0, \\ u|_{\theta=\theta_0} = 0, \\ u|_{z=0} = 0, \\ u|_{z=h} = 0. \end{array} \right. \end{cases}$$

Aplicando el MSV se encuentran las soluciones de la forma

$$R_{\alpha,m}(r)\Theta_m(\theta)Z_\alpha(z),$$

que deben satisfacer las condiciones de contorno y regularidad. En primer lugar nos centramos en la función angular  $\Theta_m$  (3.11); las condiciones de contorno en la variable  $\theta$  son

$$\Theta_m(0) = \Theta_m(\theta_0) = 0,$$

que conducen al siguiente sistema lineal para  $C$  y  $D$

$$\begin{cases} C + D = 0, \\ e^{im\theta_0}C + e^{-im\theta_0}D = 0. \end{cases}$$

Este sistema lineal posee una solución no trivial si y sólo si

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{im\theta_0} & e^{-im\theta_0} \end{vmatrix} = 0,$$

que es equivalente a que

$$\operatorname{sen} m\theta_0 = 0.$$

Por tanto

$$\boxed{m = j \frac{\pi}{\theta_0}, \quad j \in \mathbb{N}.}$$

Además  $D = -C$  y

$$\Theta_m(\theta) = 2C \operatorname{sen}(m\theta).$$

En segundo lugar nos ocupamos de la variable  $z$  e imponemos las correspondientes condiciones de contorno a  $Z_\alpha$  de (3.10). Así obtenemos el siguiente sistema lineal para  $A$  y  $B$

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ e^{i\sqrt{k^2-\alpha^2}h}A + e^{-i\sqrt{k^2-\alpha^2}h}B = 0, \end{cases}$$

que admite solución no trivial si y solo si

$$\operatorname{sen} \sqrt{k^2 - \alpha^2}h = 0.$$

Así pues

$$k^2 = n^2 \frac{\pi^2}{h^2} + \alpha^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Además  $B = -A$  y

$$Z_\alpha(z) = 2A \operatorname{sen} \frac{\pi}{h} n z.$$

Por último analizamos la variable radial  $r$ . La función radial  $R(r)$  no debe tener singularidades para  $r = 0$  y además debe satisfacer  $R(a) = 0$ . Por ello, y teniendo en cuenta la forma (3.12), se deduce que no hay soluciones no triviales para  $\alpha = 0$  y este caso queda descartado. Sólo resta por ver que ocurre para  $\alpha \neq 0$ , ahora de (3.13) se deduce  $F = 0$  (regularidad en el origen) y la condición de contorno impone que

$$J_m(\alpha a) = 0.$$

Por ello, si  $\{c_{m,\ell}\}_{\ell=1}^\infty$  son los ceros<sup>1</sup> de la función de Bessel  $J_m(x)$  llegamos a que

$$\begin{aligned} m &= j \frac{\pi}{\theta_0}, \quad j \in \mathbb{N}, \\ \alpha &= \frac{c_{m,\ell}}{a}, \quad \ell \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

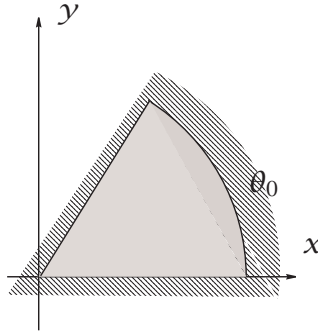
Las energías admisibles son por tanto

$$E_{j,\ell,n} = \frac{\hbar^2}{2M} \left[ \frac{\pi^2 n^2}{h^2} + \frac{(c_{j \frac{\pi}{\theta_0}, \ell})^2}{a^2} \right], \quad j, \ell, n \in \mathbb{N}$$

y las correspondientes autofunciones serán

$$J_{j \frac{\pi}{\theta_0}} \left( c_{j \frac{\pi}{\theta_0}, \ell} \frac{r}{a} \right) \operatorname{sen} \left( j \pi \frac{\theta}{\theta_0} \right) \operatorname{sen} \left( n \pi \frac{z}{h} \right).$$

El problema de una partícula cuántica bidimensional encerrada en una cuña tal como indica la figura



<sup>1</sup>Dado el comportamiento asintótico

$$J_m(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left( x - (2m+1) \frac{\pi}{4} \right)$$

observamos para los ceros que

$$c_{m,\ell} \sim (2\ell+1) \frac{\pi}{2} + (2m+1) \frac{\pi}{4}.$$

se resuelve (en coordenadas polares) haciendo  $n = 0$ . Por ejemplo, si  $a = 1$  y  $\theta_0 = \pi/2$  las energías y los estados estacionarios son

$$\frac{\hbar^2}{2M}(c_{2j,\ell})^2, \quad J_{2j}(c_{2j,\ell}r) \sin(2j\theta), \quad j, \ell \in \mathbb{Z},$$

respectivamente. Por ejemplo, para  $j = 1$ , los dos primeros ceros de la función de Bessel  $J_2$  son

$$c_{2,1} \cong 5,135622302, c_{2,2} \cong 8,417244140,$$

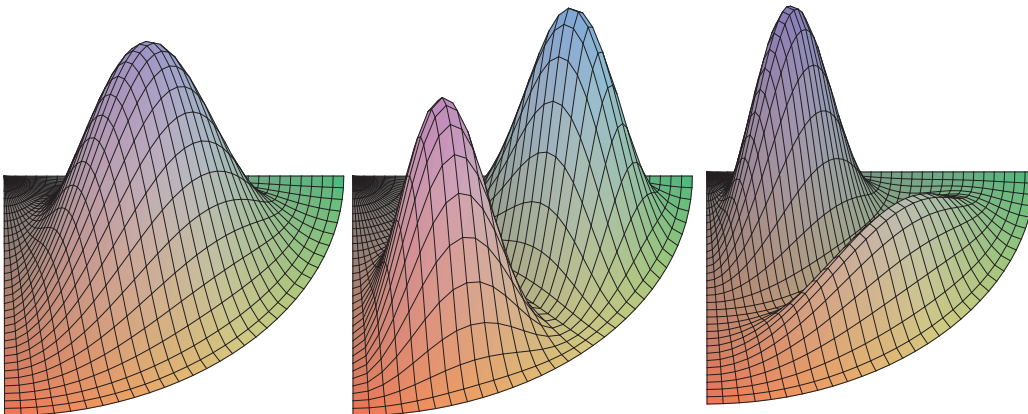
para  $j = 2$  el primer cero de la función  $J_4$  es

$$c_{4,1} \cong 7,588342435.$$

Fácilmente se comprueba que estos son los tres primeros ceros que aparecen. Por tanto el estado fundamental, el primer y segundo excitados viene representados por

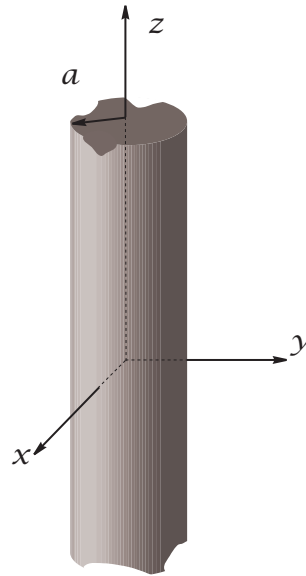
$$J_2(c_{2,1}r) \sin(2\theta), \quad J_4(c_{4,1}r) \sin(4\theta), \quad J_2(c_{2,2}r) \sin(2\theta).$$

A continuación mostramos la secuencia formada por los cuadrados de estas funciones



### 3.3.3. Fluido en una tubería cilíndrica

El potencial de velocidades  $u$  de un fluido estacionario en una tubería de sección circular como la que muestra la figura



se encuentra caracterizado por el siguiente problema de contorno de Neumann para la ecuación de Laplace

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=a} = 0. \end{cases}$$

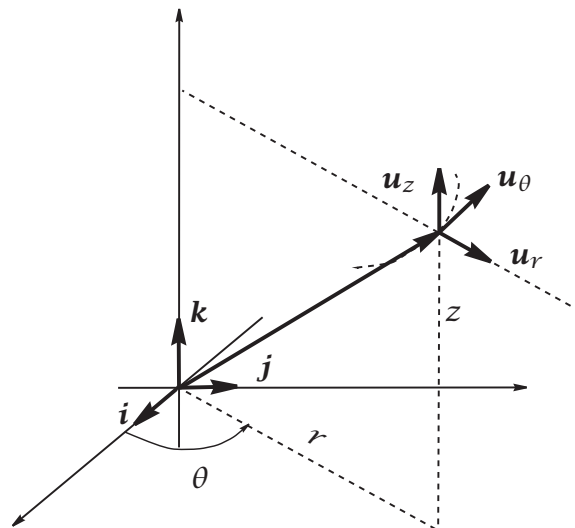
Hemos tenido en cuenta que

$$\nabla u = u_r \mathbf{u}_r + \frac{1}{r} u_\theta \mathbf{u}_\theta + u_z \mathbf{u}_z$$

en donde el triedro ortonormal  $\{\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_z\}$  se construye en términos del triedro cartesiano  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  como sigue

$$\mathbf{u}_r = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}, \quad \mathbf{u}_\theta = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}, \quad \mathbf{u}_z = \mathbf{k}.$$

Ilustramos en el siguiente diagrama la geometría involucrada





Por tanto, la normal unitaria a la superficie de la tubería cilíndrica es precisamente  $\mathbf{n} = \mathbf{u}_r$  de donde se deduce que la derivada normal en esa superficie es

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{n} \cdot \nabla u = u_r.$$

Impongamos estas condiciones de contorno a

$$R_{\alpha,m}(r)\Theta_m(\theta)Z_\alpha(z)$$

en donde tomamos  $k = 0$  (la EDP es la ecuación de Laplace). Las funciones deben ser regulares en el origen  $r = 0$  así como  $2\pi$ -periódicas en  $\theta$ , luego  $m \in \mathbb{Z}_+$ , y satisfacer la condición de Neumann homogénea en la superficie del cilindro  $r = a$ : esto es,

$$R'_{\alpha,m}(a) = 0.$$

Por tanto,  $\alpha \neq 0$ , ya que cuando  $\alpha = 0$  sólo es posible la solución trivial. Si  $\alpha \neq 0$  las funciones radiales serán, por regularidad en  $r = 0$ ,

$$J_m(\alpha r)$$

y por ello la condición de contorno se lee

$$J'_m(\alpha a) = 0.$$

Si denotamos por  $\{c'_{m,\ell}\}_{\ell \in \mathbb{N}}$  a los ceros<sup>2</sup> de  $J'_m$  entonces

$$\alpha_{m,\ell} = \frac{c'_{m,\ell}}{a}, \quad m \in \mathbb{Z}_+, \ell \in \mathbb{N}.$$

Finalmente, las soluciones son

$$\boxed{J_m\left(\alpha_{m,\ell} \frac{r}{a}\right) (C e^{im\theta} + D e^{-im\theta}) (A e^{\alpha_{m,\ell} z} + B e^{-\alpha_{m,\ell} z})}.$$

### 3.4. La ecuación de Helmholtz en coordenadas esféricas

En coordenadas esféricas

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi, \\ y = r \sin \theta \sin \phi, \\ z = r \cos \theta, \end{cases}$$

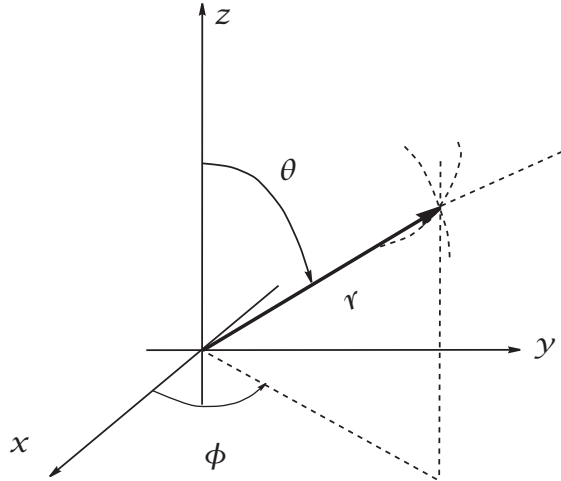
separación de variables  
ecuación de Helmholtz en  
esféricas

<sup>2</sup>Dado el comportamiento asintótico

$$J'_m(x) \sim -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - (2m+1)\frac{\pi}{4}\right)$$

observamos para los ceros que

$$c'_{m,\ell} \sim \ell\pi + (2m+1)\frac{\pi}{4}.$$



la ecuación de Helmholtz se escribe

$$r(ru)_{rr} + k^2 r^2 u + \frac{1}{\sin \theta} (\sin \theta u_\theta)_\theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} u_{\phi\phi} = 0.$$

Una primera separación de variables:

$$u(r, \theta, \phi) = R(r)Y(\theta, \phi)$$

nos lleva a desacoplar la ecuación en parte radial y angular<sup>3</sup> como sigue

$$\begin{aligned} r(rR)'' + k^2 r^2 R &= \lambda R, \\ \frac{1}{\sin \theta} (\sin \theta Y_\theta)_\theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} Y_{\phi\phi} &= -\lambda Y. \end{aligned}$$

### 3.4.1. Resolución de la ecuación angular

La ecuación angular escrita en la forma

$$\sin \theta (\sin \theta Y_\theta)_\theta + \lambda \sin^2 \theta Y + Y_{\phi\phi} = 0,$$

es separable. Así, la factorización

$$Y(\theta, \phi) = P(\theta)\Phi(\phi),$$

conduce a la pareja de EDOs siguientes

$$\begin{aligned} \sin \theta (\sin \theta P_\theta)_\theta + \lambda \sin^2 \theta P &= m^2 P, \\ \Phi_{\phi\phi} &= -m^2 \Phi. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\Phi(\phi) = C e^{im\phi}.$$

<sup>3</sup>Obsérvese que

$$\frac{1}{\sin \theta} (\sin \theta Y_\theta)_\theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} Y_{\phi\phi} = -\frac{L^2 Y}{\hbar^2}$$

donde  $L$  es el operador momento angular en mecánica cuántica.

Asumiremos que  $m \in \mathbb{Z}$  para poder asegurar la continuidad en el plano  $xz$ . Por otro lado, usando la variable

$$\xi := \cos \theta$$

la ecuación para  $P$  adopta la forma

$$\boxed{\frac{d}{d\xi} \left[ (1 - \xi^2) \frac{dP}{d\xi} \right] + \left( \lambda - \frac{m^2}{1 - \xi^2} \right) P = 0.} \quad (3.14)$$

Esta es la **ecuación de Legendre adjunta**, que cuando  $m = 0$  se reduce a la ecuación de Legendre. Se comprueba que si  $\mathcal{P}$  es solución de la ecuación de Legendre

ecuación de Legendre adjunta

$$\frac{d}{d\xi} \left[ (1 - \xi^2) \frac{d\mathcal{P}}{d\xi} \right] + \lambda \mathcal{P} = 0, \quad (3.15)$$

entonces

$$P =: (1 - \xi^2)^{|m|/2} \frac{d^{|m|} \mathcal{P}}{d\xi^{|m|}},$$

es solución de la ecuación de Legendre adjunta. La ecuación (3.15) posee soluciones regulares en  $\xi = \pm 1$  si y sólo si

$$\lambda = \ell(\ell + 1), \quad \ell = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.16)$$

que vienen dadas por los polinomios de Legendre cuya expresión (sin normalizar) es

$$\mathcal{P}_\ell := \frac{d^\ell (\xi^2 - 1)^\ell}{d\xi^\ell}, \quad \ell = 0, 1, \dots$$

Por tanto<sup>4</sup> (3.14) poseerá soluciones regulares en  $\xi = \pm 1$  si y sólo si se cumple la condición (3.16), y las soluciones correspondientes de (3.14) son

$$\boxed{P_{\ell, |m|} := (1 - \xi^2)^{|m|/2} \frac{d^{|m|+\ell} (\xi^2 - 1)^\ell}{d\xi^{|m|+\ell}}, \quad |m| \leq \ell, \ell = 0, 1, \dots} \quad (3.17)$$

Obsérvese además que estas soluciones son no triviales si y solo si  $|m| \leq \ell$ . Por tanto las soluciones de la ecuación angular pueden escribirse en la forma

$$\boxed{Y_{\ell, m}(\theta, \phi) := c_{\ell, m} P_{\ell, |m|}(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad \ell = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 0, \pm 1, \dots, \pm \ell,}$$

que son las funciones denominadas **armónicos esféricos** donde la constante de normalización, siguiendo el convenio de Condon y Shortley, la tomaremos como

armónicos esféricos

$$c_{\ell, m} := \begin{cases} (-1)^m \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-|m|)!}{(\ell+|m|)!} \frac{1}{2^\ell \ell!}}, & m \geq 0, \\ \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-|m|)!}{(\ell+|m|)!} \frac{1}{2^\ell \ell!}}, & m < 0. \end{cases}$$

<sup>4</sup>La ecuación de Legendre adjunta es un problema de Sturm-Liouville en el intervalo  $[-1, 1]$  con  $\rho(\xi) = 1$ ,  $p(\xi) = 1 - \xi^2$  y  $q(x) = m^2/(1 - \xi^2)$ . A pesar de ser singular posee un conjunto ortogonal completo de autofunciones:

$$\int_{-1}^1 P_{\ell, |m|}(\xi) P_{\ell', |m|}(\xi) d\xi = 0, \quad \text{si } \ell \neq \ell'.$$

Teniendo en cuenta que el valor absoluto  $|Y_{\ell,m}|$  es una función que no depende de  $\phi$ , podemos ilustrar la variación de los armónicos esféricos representando la superficie de revolución  $r = r(\theta, \phi) := |Y_{\ell,m}(\theta, \phi)|$ . Los armónicos esféricos constituyen además un conjunto ortonormal completo en

$$L^2(S^2) := \left\{ f = f(\theta, \phi) : \int_{S^2} |f(\theta, \phi)|^2 dS < \infty \right\},$$

donde  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  es la esfera de radio unidad en  $\mathbb{R}^3$ , y  $dS = \sin \theta d\theta d\phi$  es el elemento de área en la esfera. El producto escalar es

$$(f, g) := \int_{S^2} \bar{f}(\theta, \phi) g(\theta, \phi) dS = \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^\pi \bar{f}(\theta, \phi) g(\theta, \phi) \sin \theta d\theta \right] d\phi.$$

Así, tenemos la base ortonormal  $\{Y_{\ell,m}\}_{\substack{\ell=0,1,\dots \\ m=-\ell,\dots,\ell}}$ . Esto es forman un conjunto ortonormal

$$(Y_{\ell,m}, Y_{\ell',m'}) = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}$$

y toda función  $f(\theta, \phi)$  de  $L^2(S^2)$  admite un desarrollo

$$f(\theta, \phi) = \sum_{\ell,m} c_{\ell,m} Y_{\ell,m}(\theta, \phi)$$

donde

$$c_{\ell,m} = (Y_{\ell,m}, f) = \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^\pi \bar{Y}_{\ell,m}(\theta, \phi) f(\theta, \phi) \sin \theta d\theta \right] d\phi.$$

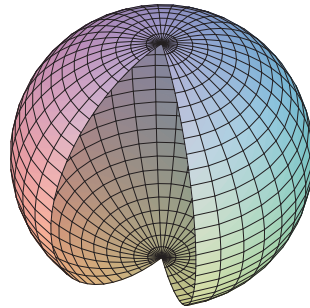
**Ejemplos** Vamos a considerar ahora algunos ejemplos sencillos de armónicos esféricos asociados a  $\ell = 0, 1, 2$ :



- Cuando  $\ell = 0$ , tenemos  $m = 0$ . Ahora  $P_{0,0} = 1$  y la constante de normalización es  $c_{0,0} = 1/\sqrt{4\pi}$ . Por tanto,

$$Y_{0,0}(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}.$$

La gráfica correspondiente es



- Si  $\ell = 1$  podemos tener tres casos:  $m = -1, 0, 1$ . Debemos evaluar las funciones de Legendre  $P_{1,0}$  y  $P_{1,1}$ . Acudiendo a la fórmula (3.17) obtenemos

$$P_{1,0}(\xi) = \frac{d}{d\xi}(\xi^2 - 1) = 2\xi,$$

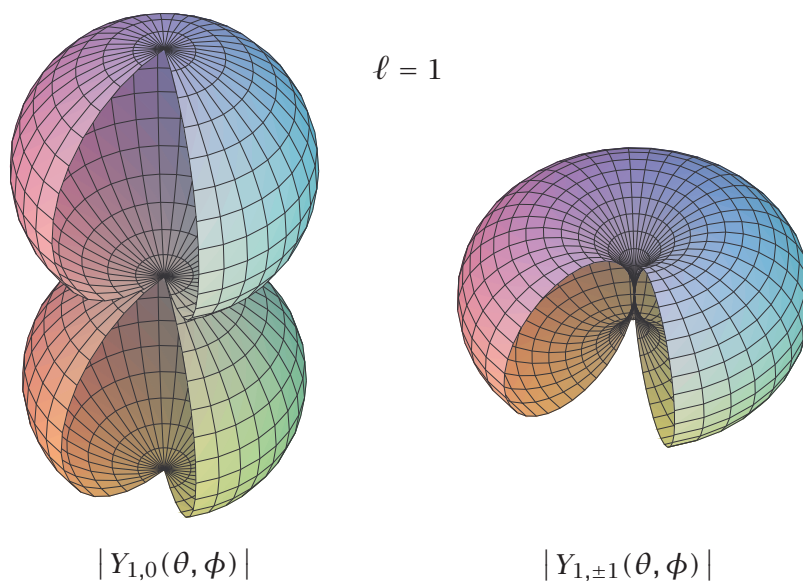
$$P_{1,1}(\xi) = \sqrt{1 - \xi^2} \frac{d^2}{d\xi^2}(\xi^2 - 1) = 2\sqrt{1 - \xi^2}.$$

Por ello,

$$Y_{1,0}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta,$$

$$Y_{1,1}(\theta, \phi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi}, \quad Y_{1,-1}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{-i\phi}.$$

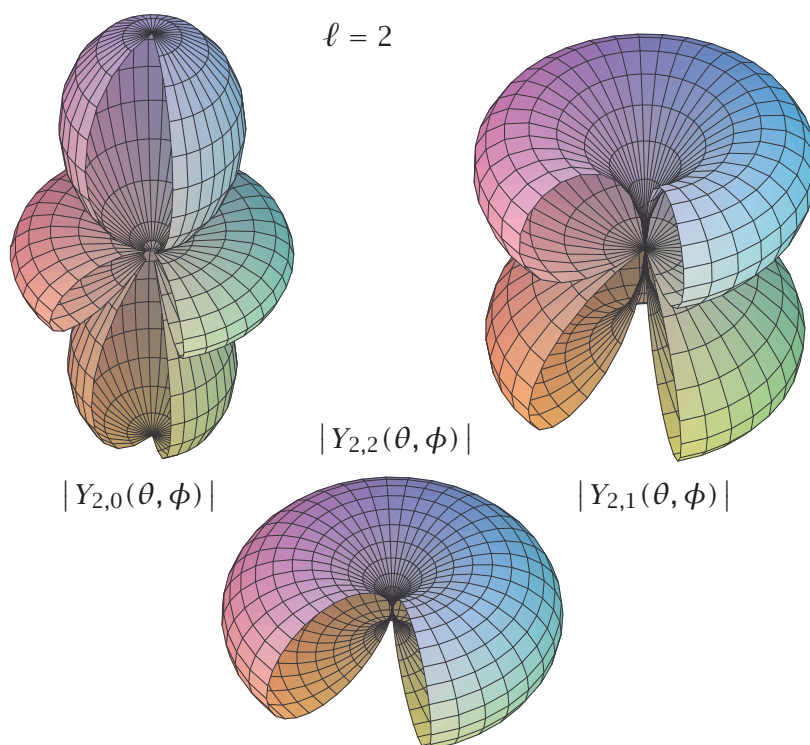
A continuación representamos las superficies  $r = |Y_{l,m}(\theta, \phi)|$  para estos armónicos esféricos



- Para  $\ell = 2$  es fácil obtener

$$\begin{aligned}
 Y_{2,0}(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (-1 + 3 \cos^2 \theta), \\
 Y_{2,1}(\theta, \phi) &= -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\phi}, \quad Y_{2,-1}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{-i\phi}, \\
 Y_{2,2}(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\phi}, \quad Y_{2,-2}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{-2i\phi}.
 \end{aligned}$$

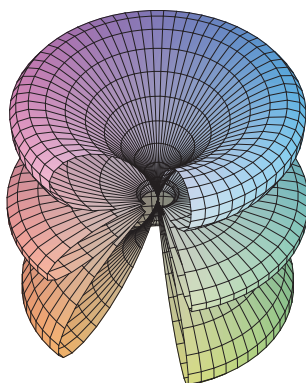
Siendo las correspondientes gráficas



- Por último, como ejercicio dejamos el cálculo de

$$Y_{5,3}(\theta, \phi) = -\frac{1}{32} \sqrt{\frac{385}{\pi}} (-1 + 9 \cos^2 \theta) \sin^3 \theta e^{3i\phi}$$

Cuya representación es



### 3.4.2. Resolución de la ecuación radial

Distinguimos dos casos según  $k$  sea nulo o no.

- Si  $k = 0$  la ecuación radial

$$r^2 R'' + 2rR' - \ell(\ell + 1)R = 0$$

que es una EDO tipo Euler. Probando soluciones de la forma  $r^\alpha$  inmediatamente se llega a la solución general que es de la forma

$$R(r) = Ar^\ell + B\frac{1}{r^{\ell+1}}. \quad (3.18)$$

- Cuando  $k \neq 0$  la EDO para  $R$  es

$$r^2 R'' + 2rR' + (k^2 r^2 - \ell(\ell+1))R = 0.$$

Introduciendo la nueva variable dependiente

$$S(r) := r^{-\ell} R(r)$$

podemos escribir esta ecuación como

$$L_\ell S := S'' + \frac{2(\ell+1)}{r} S' + k^2 S = 0.$$

Definimos ahora el operador diferencial  $T$

$$TS := \frac{1}{r} S'$$

y calculamos el conmutador  $[L_\ell, T]$  teniendo en cuenta que

$$L_\ell u = \left( \frac{d^2}{dr^2} + 2(l+1)T + k^2 \right) u.$$

Así, se obtiene

$$[L_\ell, T] = \left[ \frac{d^2}{dr^2}, T \right] = -2T^2.$$

Por tanto,

$$L_\ell TS = -2T^2 S$$

o bien

$$(L_\ell + 2T)TS = 0.$$

Observando que

$$L_\ell + 2T = L_{\ell+1}$$

concluimos que

$$L_{\ell+1} TS = 0.$$

Por ello, si  $S_0$  verifica

$$L_0 S_0 = 0$$

entonces  $S_\ell := T^\ell S_0$  satisface

$$L_\ell S_\ell = 0.$$

Así pues, nuestro problema se reduce a analizar la ecuación

$$L_0 S_0 = S_0'' + \frac{2}{r} S_0' + k^2 S_0 = 0$$



que podemos escribir como

$$(rS_0)'' + k^2 rS_0 = 0.$$

La expresión general para  $S_0$  será entonces

$$S_0(r) = A \frac{\sin kr}{r} + B \frac{\cos kr}{r}.$$

Deducimos por ello que la solución general  $S_\ell$  para  $L_\ell S_\ell = 0$  es

$$S_\ell(r) = A \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^\ell \frac{\sin kr}{r} + B \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^\ell \frac{\cos kr}{r}$$

y que la función radial  $R_\ell(r)$  es

$$R_\ell(r) = Ar^\ell \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^\ell \frac{\sin kr}{r} + Br^\ell \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^\ell \frac{\cos kr}{r}.$$

Introduciendo las funciones esféricas de Bessel y Neumann

$$j_\ell(r) := (-r)^\ell \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^\ell \frac{\sin r}{r}, \quad n_\ell(r) := -(-r)^\ell \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^\ell \frac{\cos r}{r},$$

y re-definiendo las constantes arbitrarias  $A$  y  $B$  concluimos que la función radial es

$$R_\ell(r) = A j_\ell(kr) + B n_\ell(kr). \quad (3.19)$$

Las primeras funciones esféricas son:

	$\ell = 0$	$\ell = 1$	$\ell = 2$
$j_\ell(r)$	$\frac{\sin r}{r}$	$\frac{\sin r}{r^2} - \frac{\cos r}{r}$	$3 \frac{\sin r}{r^3} - 3 \frac{\cos r}{r^2} - \frac{\sin r}{r}$
$n_\ell(r)$	$-\frac{\cos r}{r}$	$-\frac{\cos r}{r^2} - \frac{\sin r}{r}$	$-3 \frac{\cos r}{r^3} - 3 \frac{\sin r}{r^2} + \frac{\cos r}{r}$

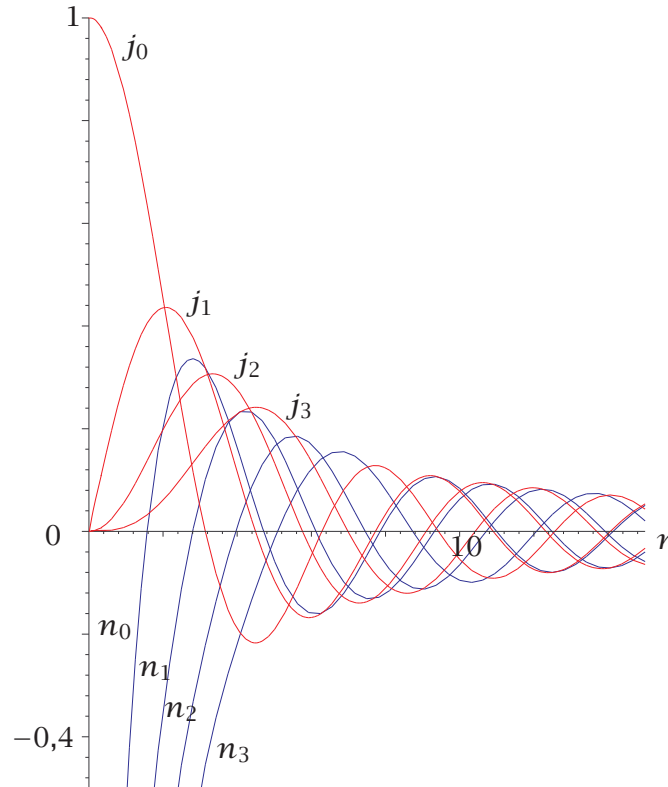
El comportamiento de estas funciones en el origen<sup>5</sup> es

$$\begin{aligned} j_\ell(r) &\sim \frac{r^\ell}{(2\ell+1)!!}, \\ n_\ell(r) &\sim -\frac{(2\ell-1)!!}{r^{\ell+1}}, \end{aligned} \quad r \rightarrow 0. \quad (3.20)$$

A continuación mostramos la gráfica de las funciones esféricas de Bessel y Neumann para  $\ell = 0, 1, 2, 3$

<sup>5</sup>Las funciones de Bessel y Neumann esféricas poseen el siguiente comportamiento en el infinito

$$\begin{aligned} j_\ell(r) &= \frac{1}{r} \cos \left( r - (\ell+1) \frac{\pi}{2} \right) \\ n_\ell(r) &= \frac{1}{r} \sin \left( r - (\ell+1) \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned} \quad r \rightarrow \infty.$$



### 3.4.3. Partícula cuántica en una caja esférica

Los estados estacionarios de energía  $E$  de una partícula libre en el interior de una esfera de radio  $a$  de paredes impenetrables viene descrita por las soluciones del problema de contorno siguiente:

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0, & E = \frac{\hbar^2 k^2}{2M}, \\ u|_{r=a} = 0. \end{cases}$$

Debemos imponer a las soluciones de la ecuación de Helmholtz

$$u(r, \theta, \phi) = R_{k,\ell}(r) Y_{\ell,m}(\theta, \phi)$$

tanto la regularidad en el origen como las condiciones de contorno. La regularidad en el origen impone que  $B = 0$  en (3.18) y (3.19). Por otro lado la condición de contorno para el caso (3.18) conduce a  $A = 0$  y a la solución trivial, mientras que para (3.19) conduce a

$$j_\ell(ka) = 0.$$

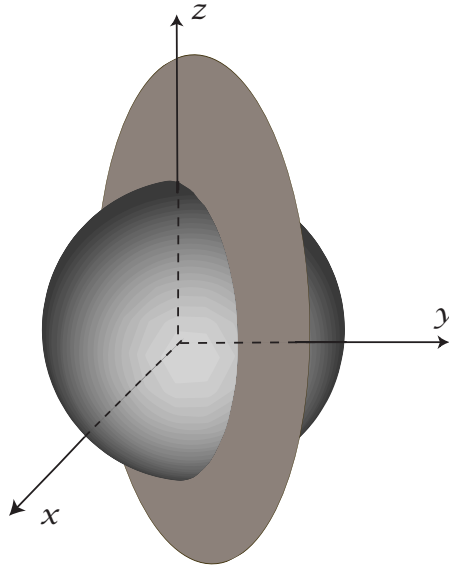
Así, si  $\{c_{\ell,n}\}_{n=1}^\infty$  son los ceros, que forman una secuencia creciente no acotada, de la función esférica de Bessel  $j_\ell$  los valores admisibles de la energía son

$$E_{\ell,n} = \frac{\hbar^2}{2M} \frac{c_{\ell,n}^2}{a^2}$$

y los correspondientes estados estacionarios

$$u_{\ell,m,n}(r, \theta, \phi) = j_{\ell}\left(\frac{c_{\ell,n}}{a}r\right)Y_{\ell,m}(\theta, \phi).$$

La densidad de probabilidad  $|u_{\ell,m,n}|^2$  no depende de la variable  $\phi$ . Por tanto, podemos representar, usando coordenadas polares  $(r, \theta)$ , la probabilidad en los planos que contienen al eje  $z$ ,  $\phi = \text{constante}$ , y esta representación será la misma para todos estos planos.



Los tres primeros ceros son

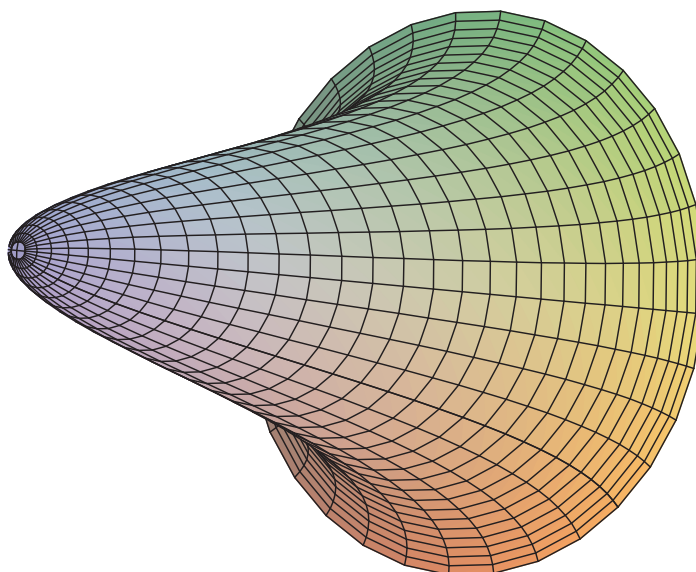
$$c_{0,1} = \pi, \quad c_{1,1} \cong 4,493409458, \quad c_{2,1} \cong 5,763459197,$$

y por ello las energías del estado fundamental y de los primeros excitados es aproximadamente

$$\frac{\hbar^2}{2Ma^2}9,869604404, \quad \frac{\hbar^2}{2Ma^2}20,190728557, \quad \frac{\hbar^2}{2Ma^2}33,217461915.$$

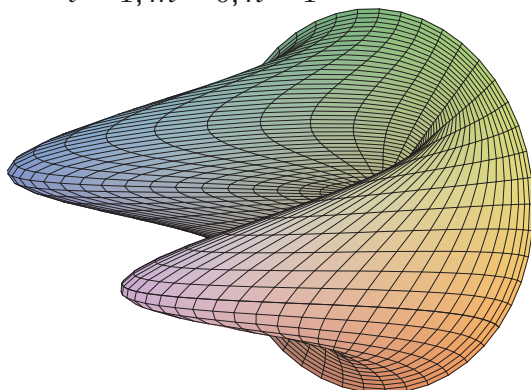
El nivel fundamental es simple con autofunción  $u_{001}$  y la probabilidad en uno de los planos que contienen al eje  $z$  se representa como

$$\ell = 0, m = 0, n = 1$$

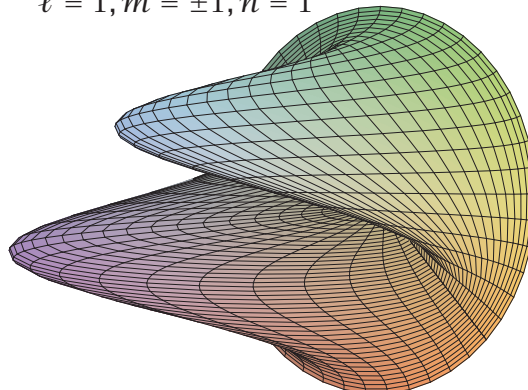


Para el primer excitado tenemos degeneración 3, esto es el subespacio propio es tridimensional y está generado por  $\{u_{1m1}\}_{m=0,\pm1}$ , para  $m = 0$  y para  $m = \pm 1$  representamos las correspondientes densidades de probabilidad en los mencionados planos

$$\ell = 1, m = 0, n = 1$$



$$\ell = 1, m = \pm 1, n = 1$$



### 3.4.4. Fluido en el interior de una caja esférica

El potencial de velocidades  $u$  para un fluido estacionario en un recinto esférico de radio  $a$  se encuentra caracterizado por el problema de Neumann siguiente

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ u_r|_{r=a} = 0. \end{cases}$$

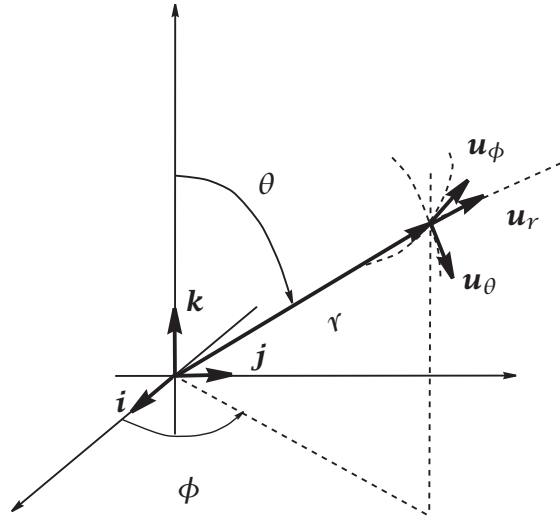
En donde hemos tenido en cuenta que

$$\nabla u = u_r \mathbf{u}_r + \frac{1}{r} u_\theta \mathbf{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} u_\phi \mathbf{u}_\phi$$

y la base ortonormal  $\{\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_\phi\}$  es

$$\begin{cases} \mathbf{u}_r = \sin \theta \cos \phi \mathbf{i} + \sin \theta \sin \phi \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k}, \\ \mathbf{u}_\theta = \cos \theta \cos \phi \mathbf{i} + \cos \theta \sin \phi \mathbf{j} - \sin \theta \mathbf{k}, \\ \mathbf{u}_\phi = -\sin \phi \mathbf{i} + \cos \phi \mathbf{j}. \end{cases}$$

Estos vectores los dibujamos a continuación



Por tanto, la normal unitaria a la superficie esférica es precisamente  $\mathbf{n} = \mathbf{u}_r$  y así

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{n} \cdot \nabla u = u_r.$$

Tenemos una ecuación de Helmholtz con  $k = 0$  (ecuación de Laplace). La regularidad en el origen implica que  $B = 0$  por ello las posibles autofunciones son de la forma

$$r^\ell Y_{\ell,m}(\theta, \phi).$$

La condición de contorno implica que  $\ell = 0$  y por ello el potencial es constante. Esto quiere decir que el fluido no se mueve.

### 3.5. El método de desarrollo en autofunciones (MDA)

Este es el método clásico para resolver problemas de contorno y/o de condiciones iniciales de tipo lineal. Se aplica en situaciones en que las ecuaciones son inhomogéneas y se basa en el uso de desarrollos en conjuntos completos de autofunciones de uno de los operadores que aparecen en la EDP correspondiente.

#### 3.5.1. El MDA en problemas inhomogéneos

El MDA puede aplicarse a problemas inhomogéneos

$$\begin{cases} Au + Bu = f, & x \in \Omega, \\ a_i(u) = g_i, & i = 1, \dots, r \\ b_j(u) = h_j, & j = 1, \dots, s. \end{cases}$$

sobre un dominio

$$\Omega = I \times \Omega_0, \quad x = (x_0, \mathbf{x}), \quad x_0 \in I, \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \Omega_0,$$

siendo  $I$  un intervalo abierto de  $\mathbb{R}$  y  $\Omega_0$  un abierto de  $\mathbb{R}^{n-1}$ . La EDP y las condiciones de contorno y/o iniciales deben verificar:

1. La EDP es de la forma

$$A\left(x_0; \frac{\partial}{\partial x_0}\right)u + B\left(x_1, \dots, x_{n-1}; \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}\right)u = f(x). \quad (3.21)$$

2. El sistema de condiciones de contorno y/o iniciales se divide en dos subsistemas. Uno de ellos

$$a_i(u) = g_i(\mathbf{x}), \quad i = 1, \dots, r, \quad (3.22)$$

*contiene operadores  $a_i$  que operan solo sobre la variable  $x_0$ , mientras que en el otro*

$$b_j(u) = h_j(\mathbf{x}), \quad j = 1, \dots, s, \quad (3.23)$$

*aparecen operadores  $b_j$  que operan solo sobre las variables  $(x_1, \dots, x_{n-1})$ .*

3. *El operador  $B$  es simétrico sobre el dominio*

$$\mathcal{D} = \{w \in C^\infty(\overline{\Omega}_0) : b_j(w) = 0, \quad j = 1, \dots, s\}, \quad (3.24)$$

*en un espacio  $L^2_\rho(\overline{\Omega}_0)$ .*

4. Los términos inhomogéneos  $f$  y  $g_i$  del problema admiten desarrollos de la forma

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_m f_m(x_0) w_m(\mathbf{x}), \\ g_i(\mathbf{x}) &= \sum_m c_{im} w_m(\mathbf{x}), \quad i = 1, \dots, r, \end{aligned}$$

*en un conjunto de autofunciones en  $\mathcal{D}$  del operador  $B$*

$$Bw_m = \lambda_m w_m,$$

*que por tanto satisfacen las condiciones de contorno homogéneas*

$$b_j(w_m) = 0, \quad j = 1, \dots, s.$$

método de desarrollo en autofunciones

Supuesto que se cumplen estas condiciones el MDA se aplica mediante el siguiente proceso:

1. Se busca una solución del problema en forma de un desarrollo en serie en autofunciones

$$u(x) = \sum_m v_m(x_0) w_m(\mathbf{x}). \quad (3.25)$$

Las incógnitas son entonces los coeficientes  $v_m(x_0)$  de la serie. Como las funciones  $w_m$  forman un conjunto ortogonal, se verifica

$$(w_m, u) = v_m(x_0) \|w_m\|^2, \quad (3.26)$$

siendo  $(\cdot, \cdot)$  la operación de producto escalar en  $L^2_p(\overline{\Omega}_0)$ . Por otra parte como el operador  $A$  solo opera sobre la variable  $x_0$ , mientras que la operación de producto escalar solo integra sobre las variables  $(x_1, \dots, x_{n-1})$ , es de esperar que *bajo condiciones apropiadas de regularidad* se verifique

$$(w_m, Au) = A(w_m, u) = \|w_m\|^2 Av_m, \quad (3.27)$$

donde se ha usado (3.26) en la segunda igualdad.

2. Se multiplica escalarmente la EDP por cada función  $w_m$

$$(w_m, Au) + (w_m, Bu) = (w_m, f),$$

y usando (3.27) se obtiene

$$\|w_m\|^2 Av_m + (w_m, Bu) = \|w_m\|^2 f_m. \quad (3.28)$$

El segundo término del primer miembro requiere un análisis aparte. En primer lugar es de observar que  $B$  es simétrico sobre el dominio (3.24), pero  $u$  no estará en ese dominio salvo que los datos  $h_j(x)$  sean cero. *Para poder aplicar el MDA debe suceder que al pasar el operador  $B$  de derecha a izquierda en el producto escalar  $(w_m, Bu)$ , las condiciones de frontera  $b_j(u) = h_j$  deben ser equivalentes a poder descomponer*

$$(w_m, Bu) = (Bw_m, u) + I_m(h), \quad (3.29)$$

donde los términos  $I_m(h)$  deben ser de la forma

$$I_m(h) = \int_{S(\Omega_0)} \sum_j C_{mj} h_j(x) \, dS,$$

con  $C_{mj}$  siendo operadores actuando sobre los datos  $h_j$  que habrá que determinar en cada caso. Por otro lado se verifica que

$$(Bw_m, u) = (\lambda_m w_m, u) = \lambda_m (w_m, u) = \lambda_m \|w_m\|^2 v_m,$$

donde se ha tenido en cuenta que al ser  $B$  simétrico sus autovalores son números reales. De esta forma se obtiene que (3.28) adopta la forma

$$Av_m + \lambda_m v_m + \frac{I_m(h)}{\|w_m\|^2} = f_m. \quad (3.30)$$

Obtenemos así una ecuación diferencial ordinaria para cada coeficiente  $v_m(x_0)$ .

3. Una vez obtenida la solución general de la ecuación diferencial ordinaria para cada función  $v_m$ , debemos exigir que la solución en forma de serie  $u = u(x)$  satisfaga las condiciones de contorno  $a_i(u) = g_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, r$ . Para ello emplearemos la misma táctica que con la EDP multiplicando escalarmente las ecuaciones de las condiciones de contorno/iniciales por cada función  $w_m$

$$(w_m, a_i(u)) = (w_m, g_i).$$

Como los operadores  $a_i$  solo operan sobre la variable  $x_0$ , mientras que la operación de producto escalar solo integra sobre las variables  $(x_1, \dots, x_{n-1})$ , *bajo condiciones apropiadas de regularidad* se verificará

$$(w_m, a_i(u)) = a_i((w_m, u)) = \|w_m\|^2 a_i(v_m). \quad (3.31)$$

Además, dado que

$$g_i(x) = \sum_m c_{im} w_m(x), \quad (3.32)$$

es claro que

$$(w_m, g_i) = \|w_m\|^2 c_{im}.$$

Por tanto se obtiene

$$\boxed{a_i(v_m) = c_{im}} \quad (3.33)$$

que son junto con la ecuación (3.30) las condiciones para determinar los coeficientes  $v_m$  del desarrollo (3.25) buscado.

4. Una simplificación considerable se encuentra cuando las funciones  $h_j$  son cero, es decir cuando las condiciones de contorno (3.23) son homogéneas

$$b_j(u) = 0, \quad j = 1, \dots, s.$$

En este caso la función buscada  $u$  pertenece al dominio (3.24) donde es simétrico el operador  $B$ . Por tanto

$$(w_m, Bu) = (Bw_m, u),$$

así que los términos  $I_m(h)$  son cero y la (3.30) se reduce a

$$\boxed{Av_m + \lambda_m v_m = f_m}. \quad (3.34)$$

Los coeficientes buscados serán entonces las soluciones de esta ecuación diferencial ordinaria que satisfacen las condiciones

$$\boxed{a_i(v_m) = c_{im}}.$$

Es de observar que *estas ecuaciones que caracterizan  $v_m$  se obtienen simplemente sustituyendo los desarrollos (3.25) y (3.32) en la EDP (3.21) y en las condiciones (3.22), e identificando coeficientes en los correspondientes desarrollos en autofunciones que se obtienen*. Este método alternativo admite una generalización natural al caso en que los desarrollos en autofunciones de los datos  $f$  y  $g_i$  sean combinaciones lineales generalizadas de autofunciones del operador  $B$ , que utilicen operaciones de integración como la transformada de Fourier. En tales situaciones se busca una solución  $u$  en la forma de un desarrollo del mismo tipo, se sustituye en (3.21) y (3.22) y se identifican los coeficientes en los desarrollos obtenidos para obtener ecuaciones análogas a (3.34) y (3.33).



5. Las hipótesis sobre la existencia de desarrollos de las funciones  $f$  y  $g_i$  en autofunciones de  $B$  siempre se cumple cuando el conjunto de autofunciones de  $B$  es completo, lo cual es cierto para amplias clases de operadores simétricos vistos en el capítulo anterior.

**El MDA en ecuaciones de evolución** Una de las situaciones más frecuentes en que se utiliza el MDA es en problemas del tipo siguiente

método de desarrollo en autofunciones en ecuaciones de evolución

1. La EDP es una ecuación de evolución de la forma

$$a \frac{\partial^r u}{\partial t^r} + B\left(x_1, \dots, x_{n-1}; \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}\right) u = f(x).$$

con  $a \in \mathbb{C}$ .

2. La solución debe satisfacer  $r$  condiciones iniciales

$$\frac{\partial^i u}{\partial t^i}(t_0, \mathbf{x}) = g_i(\mathbf{x}), \quad i = 1, \dots, r.$$

así como un conjunto de condiciones de frontera

$$b_j(u) = h_j(x), \quad j = 1, \dots, s,$$

con operadores  $b_j$  que operan sólo sobre las variables  $(x_1, \dots, x_{n-1})$ .

En este caso el operador  $A$  es

$$Au = a \frac{\partial^r u}{\partial t^r},$$

y las condiciones  $a_i(u) = g_i$  son

$$\frac{\partial^i u}{\partial t^i}(t_0, \mathbf{x}) = g_i(\mathbf{x}), \quad i = 1, \dots, r.$$

### 3.5.2. Ejemplos en dos dimensiones

1. Sea el siguiente problema con la ecuación de Laplace sobre un rectángulo

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = 0, \\ u(x, 0) = \text{sen } \frac{\pi x}{a}, \quad u(x, b) = 0. \end{cases} \quad (3.35)$$

Este problema describe la distribución estacionaria de la temperatura en una placa  $[0, a] \times [0, b]$ , con todos sus lados a temperatura nula salvo uno que tiene una distribución de temperatura tipo seno. El problema espectral es

$$\begin{cases} -w_{xx} = \lambda w, \\ w|_{x=0} = 0, \\ w|_{x=a} = 0. \end{cases}$$

tiene como solución

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{a^2}, \quad w_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Aplicando el MDA desarrollamos la solución en la forma

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(y) \sin \frac{n\pi x}{a}$$

como en las inhomogeneidades sólo aparece el término  $\sin \frac{\pi x}{a}$ , buscamos nuestra solución en la forma

$$u(x, y) = v(y) \sin \frac{\pi x}{a}.$$

La función  $v$  está determinada por

$$\begin{cases} v'' = \frac{\pi^2}{a^2} v, \\ v|_{y=0} = 1, \\ v|_{y=b} = 0. \end{cases}$$

La solución es de la forma

$$v(y) = A e^{\frac{\pi}{a} y} + B e^{-\frac{\pi}{a} y}$$

donde

$$\begin{cases} A + B = 1, \\ A e^{\frac{\pi}{a} b} + B e^{-\frac{\pi}{a} b} = 0. \end{cases}$$

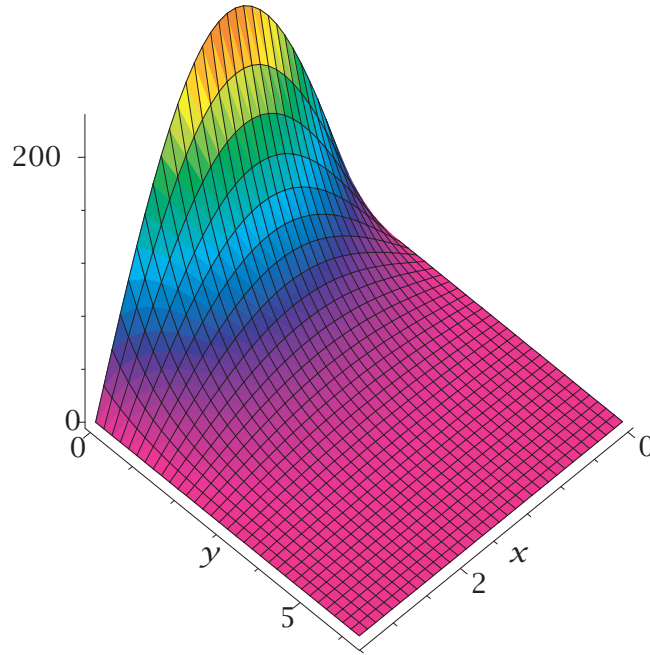
La solución de este sistema es

$$A = -\frac{e^{-\pi \frac{b}{a}}}{2 \sinh \pi \frac{b}{a}}, \quad B = \frac{e^{\pi \frac{b}{a}}}{2 \sinh \pi \frac{b}{a}}$$

y así la solución será

$$u(x, y) = \frac{\sinh \frac{\pi}{a} (b - y)}{\sinh \frac{\pi}{a} b} \sin \frac{\pi x}{a}.$$

La gráfica para esta distribución de temperatura en una placa con  $a = \pi, b = 2\pi$  es



2. Consideramos ahora un problema de condiciones iniciales y de contorno para la ecuación de Schrödinger

$$\begin{cases} i\hbar u_t = -\frac{\hbar^2}{2m}u_{xx} + V(x)u, & x \in (a, b), t > 0, \\ u|_{t=0} = g(x), \\ \begin{cases} u|_{x=a} = 0, \\ u|_{x=b} = 0, \end{cases} \end{cases}$$

que describe la evolución de una partícula cuántica encerrada en el segmento  $(a, b)$  sujeta al potencial  $V(x)$ . Introduciendo el operador diferencial, conocido como hamiltoniano cuántico,

$$Hu := -\frac{\hbar^2}{2m}u_{xx} + V(x)u$$

la ecuación de Schrödinger se lee como

$$-i\hbar u_t + Hu = 0.$$

El método de desarrollo en autofunciones se basa en este caso en el problema de autovalores

$$\begin{cases} Hw = \lambda w, \\ \begin{cases} w|_{x=a} = 0, \\ w|_{x=b} = 0. \end{cases} \end{cases}$$

Suponiendo que  $\{\lambda_n\}_{n=1,2,\dots}$  es el conjunto de sus autovalores con autofunciones asociadas  $\{w_n(x)\}_{n=1,2,\dots}$  buscamos soluciones de la forma

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t)w_n(x)$$

que cuando se introducen en la ecuación de Schrödinger

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( -i\hbar \frac{d}{dt} v_n(t) + \lambda_n v_n(t) \right) w_n(x) = 0,$$

conducen a

$$-i\hbar \frac{d}{dt} v_n(t) + \lambda_n v_n(t) = 0;$$

cuya solución es

$$v_n(t) = a_n e^{-i \frac{\lambda_n}{\hbar} t}.$$

Si ahora asumimos que la condición inicial posee el desarrollo

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n w_n(x),$$

concluimos que  $a_n = c_n$  y por ello la solución a nuestro problema es

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-i \frac{\lambda_n}{\hbar} t} w_n(x).$$

Vamos a concretar a tres situaciones:

■ Estudiemos ahora

$$\begin{cases} i\hbar u_t = -\frac{\hbar^2}{2m} u_{xx}, & x \in (0, l), t > 0, \\ u|_{t=0} = 2 \sin \frac{\pi}{l} x - \sin 3 \frac{\pi}{l} x, \\ \begin{cases} u|_{x=0} = 0, \\ u|_{x=l} = 0, \end{cases} \end{cases}$$

Esto es, una partícula cuántica libre confinada en el segmento  $(0, l)$ . El problema de autovalores es el ya bien conocido

$$\begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2m} w_{xx} = \lambda w, \\ \begin{cases} w|_{x=0} = 0, \\ w|_{x=l} = 0, \end{cases} \end{cases}$$

con autovalores

$$\lambda_n = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{n^2 \pi^2}{l^2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

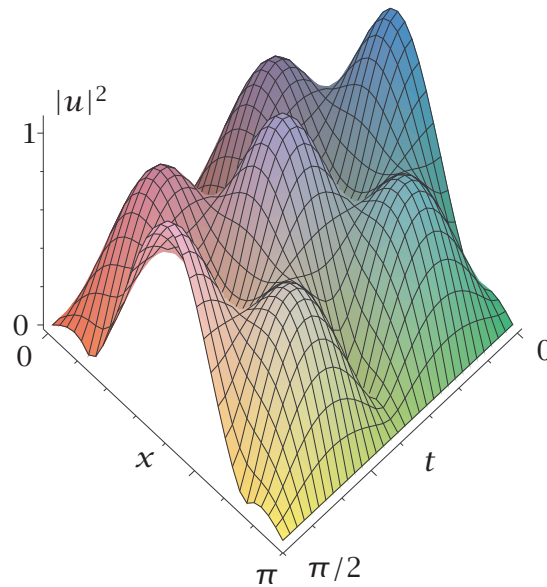
y correspondientes autofunciones dadas por

$$w_n(x) = \sin \left( \frac{n\pi}{l} x \right), \quad n = 1, 2, \dots$$

Por tanto, la condición inicial ya está desarrollada en autofunciones y así obtenemos para el estado de la partícula

$$u(t, x) = 2 \sin \left( \frac{\pi}{l} x \right) e^{-i \frac{\hbar}{2m} \frac{\pi^2}{l^2} t} - \sin \left( 3 \frac{\pi}{l} x \right) e^{-i \frac{\hbar}{2m} \frac{9\pi^2}{l^2} t}$$

A continuación presentamos la gráfica espacio-temporal para la densidad de probabilidad



- Seguimos con el caso libre aunque cambiamos las condiciones de contorno tipo Dirichlet por condiciones periódicas. Así el problema de condiciones iniciales y contorno a resolver es

$$\begin{cases} i\hbar u_t = -\frac{\hbar^2}{2m} u_{xx}, & x \in (0, l), t > 0, \\ u|_{t=0} = 2i - 2 \cos \frac{2\pi}{l} x + 7 \sin \frac{6\pi}{l} x, \\ \begin{cases} u|_{x=0} = u|_{x=l}, \\ u_x|_{x=0} = u_x|_{x=l}. \end{cases} \end{cases}$$

El problema de autovalores es también familiar

$$\begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2m} w_{xx} = \lambda w, \\ \begin{cases} w|_{x=0} = w|_{x=l}, \\ w_x|_{x=0} = w_x|_{x=l}. \end{cases} \end{cases}$$

con autovalores (todos dobles salvo el cero que es simple)

$$\lambda_n = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{4n^2\pi^2}{l^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

y correspondientes autofunciones dadas por

$$\left\{ w_0(x) = 1, w_n^{(+)}(x) = \cos \frac{n2\pi}{l} x, w_n^{(-)}(x) = \sin \frac{n2\pi}{l} x \right\}_{n=1,2,\dots}.$$

En la condición inicial intervienen las autofunciones  $w_0$ ,  $w_1^{(+)}$  y  $w_3^{(-)}$ . Por tanto,

$$u(t, x) = 2i - 2 \cos \frac{2\pi}{l} x e^{-i \frac{\hbar}{2m} \frac{4\pi^2}{l^2} t} + 7 \sin \frac{6\pi}{l} x e^{-i \frac{\hbar}{2m} \frac{36\pi^2}{l^2} t}.$$

- Consideramos ahora el **oscilador armónico cuántico** en una dimensión. El problema de condiciones iniciales y de contorno que se nos plantea es

$$\begin{cases} i\hbar u_t = -\frac{\hbar^2}{2m} u_{xx} + \frac{1}{2} kx^2 u, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u|_{t=0} = g(x), \\ \begin{cases} u|_{x \rightarrow -\infty} = 0, \\ u|_{x \rightarrow +\infty} = 0, \end{cases} \end{cases}$$

que lleva al siguiente problema de autovalores

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} w_{xx} + \frac{1}{2} kx^2 w &= \lambda w, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \begin{cases} w|_{x \rightarrow -\infty} = 0, \\ w|_{x \rightarrow +\infty} = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Introduciendo  $K := \frac{m}{\hbar^2} k$ ,  $\tilde{x} := \sqrt[4]{K} x$  y  $\Lambda := \frac{2m}{\hbar^2} / \sqrt{K} \lambda$  podemos escribir

$$-w_{\tilde{x}\tilde{x}} + \tilde{x}^2 w = \Lambda w$$

que es la ecuación de Hermite que una vez impuestas las condiciones de contorno en el infinito nos lleva a los autovalores

$$\Lambda_n = 2n + 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

con correspondientes autofunciones

$$w_n(\tilde{x}) = H_n(\tilde{x}) e^{-\frac{\tilde{x}^2}{2}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Notemos que estamos usando los polinomios de Hermite  $H_n$ . Estas autofunciones forman una base ortogonal de  $L^2(\mathbb{R})$ . Por tanto,

$$\lambda_n = \hbar \sqrt{\frac{k}{2m}} (2n + 1), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

y

$$w_n(x) = H_n\left(\sqrt{\frac{\sqrt{mk}}{\hbar}} x\right) e^{-\frac{\sqrt{mk}}{2\hbar} x^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Luego si

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n w_n(x)$$

la solución es

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-i\sqrt{\frac{k}{2m}}(2n+1)t} H_n\left(\sqrt{\frac{\sqrt{mk}}{\hbar}} x\right) e^{-\frac{\sqrt{mk}}{2\hbar} x^2}.$$

3. Analizamos ahora un problema de condiciones iniciales para la ecuación del calor con condiciones de frontera periódicas. El problema es

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in (0, l), t > 0, \\ \begin{cases} u|_{t=0} = \frac{2}{l^2}x^3 - \frac{3}{l}x^2 + x, \\ u|_{x=0} = u|_{x=l}, \\ u_x|_{x=0} = u_x|_{x=l}. \end{cases} \end{cases}$$

Nos detenemos un momento para discutir la consistencia entre la condición inicial y las condiciones de frontera. Si  $g(x) = ax^3 + bx^2 + x$  y exigimos que  $g(0) = g(l)$  y  $g'(0) = g'(l)$  nos conducen a las condiciones

$$\begin{aligned} al^2 + bl + c &= 0, \\ 3al + 2b &= 0, \end{aligned}$$

que fija una familia uni-paramétrica de soluciones  $a, b, c$ . Una posible elección es la dada por nuestra condición inicial. El problema de autovalores es

$$\begin{cases} -w_{xx} = \lambda w, \\ \begin{cases} w|_{x=0} = w|_{x=l}, \\ w_x|_{x=0} = w_x|_{x=l}. \end{cases} \end{cases}$$

que como sabemos tiene como autovalores

$$\lambda_n = n^2 \omega^2, \quad \omega = \frac{2\pi}{l}$$

y autofunciones

$$w_n(x) = e^{in\omega x}.$$

Para aplicar el método de desarrollo en autofunciones tenemos que determinar la serie de Fourier

$$g(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\omega x}$$

con

$$c_n = \frac{1}{l} \int_0^l g(x) e^{-in\omega x} dx.$$

Como nuestra  $g$  es un polinomio, usaremos las integrales

$$I_{m,n} := \int_0^l x^m e^{-in\omega x} dx = \begin{cases} i \frac{1}{n\omega} (l^m - m I_{m-1,n}) & n \neq 0, \\ \frac{l^{m+1}}{m+1} & n = 0. \end{cases}$$

En la primera identidad se ha utilizado el método de integración por partes. Fácilmente se concluye que

$$I_{0,n} = 0$$

Ello nos lleva a que

$$I_{1,n} = \begin{cases} \frac{l^2}{2} & n = 0, \\ i \frac{l}{n\omega} & n \neq 0, \end{cases}$$

y esto a su vez a

$$I_{2,n} = \begin{cases} \frac{l^3}{3} & n = 0, \\ i \frac{l^2}{n\omega} + \frac{2l}{n^2\omega^2} & n \neq 0, \end{cases}$$

y por último a

$$I_{3,n} = \begin{cases} \frac{l^4}{4} & n = 0, \\ i \frac{l^3}{n\omega} + \frac{3l^2}{n^2\omega^2} - i \frac{6l}{n^3\omega^3} & n \neq 0. \end{cases}$$

Por tanto, la serie de Fourier de nuestra condición inicial<sup>6</sup> es

$$\begin{aligned} \frac{2}{l^2}x^3 - \frac{3}{l}x^2 + x &= \frac{1}{l} \left( \frac{2}{l^2} \frac{l^4}{4} - \frac{3}{l} \frac{l^3}{3} + \frac{l^2}{2} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n \neq 0} \left[ \frac{2}{l^2} \left( i \frac{l^3}{n\omega} + \frac{3l^2}{n^2\omega^2} - i \frac{6l}{n^3\omega^3} \right) - \frac{3}{l} \left( i \frac{l^2}{n\omega} + \frac{2l}{n^2\omega^2} \right) + i \frac{l}{n\omega} \right] e^{in\omega x} \right) \\ &= \frac{24}{l^2\omega^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \operatorname{sen} n\omega x. \end{aligned}$$

Buscamos entonces una solución de la forma

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) \operatorname{sen} n\omega x$$

que implica

$$\begin{aligned} v'_n &= -\lambda_n v_n, \\ v_n(0) &= \frac{24}{l^2\omega^3} \frac{1}{n^3} \end{aligned}$$

y por ello

$$v_n(t) = \frac{24}{l^2\omega^3} \frac{1}{n^3} e^{-n^2\omega^2 t}.$$

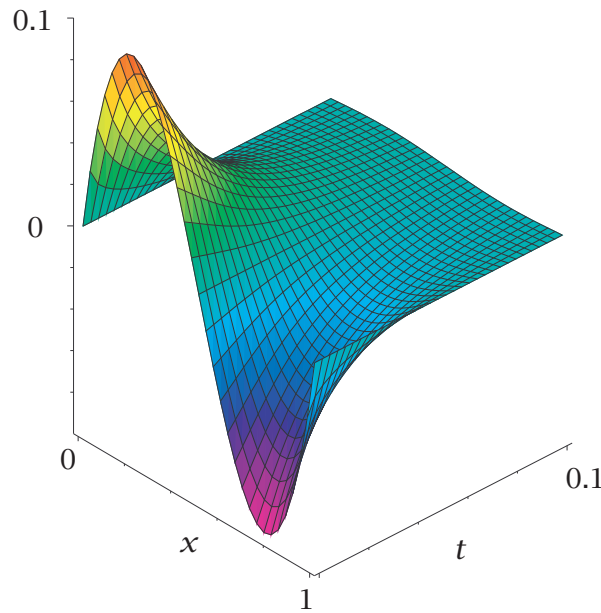
Finalmente la solución es

$$u(t, x) = \frac{24}{l^2\omega^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} e^{-n^2\omega^2 t} \operatorname{sen} n\omega x.$$

Dado el rápido decrecimiento de los coeficientes  $v_n$  en  $n$  y  $t$  la representación gráfica se consigue con un buen grado de aproximación con una suma parcial de pocos términos, a continuación mostramos la representación espacio-temporal de esta evolución para  $l = 1$  y una suma parcial a 15 términos

<sup>6</sup>La función  $g(x)$  es una función impar con respecto al punto  $x = l/2$ , este es el motivo de que aparezcan sólo senos.





4. Estudiamos ahora la ecuación de ondas y el problema

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & x \in (-1, 1), t > 0, \\ \begin{cases} u|_{t=0} = x(x^2 - 1), \\ u_t|_{t=0} = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} u|_{x=-1} = u|_{x=1}, \\ u_x|_{x=-1} = u_x|_{x=1}. \end{cases} \end{cases}$$

El problema de autovalores es como en los casos anteriores. Pasamos a desarrollar  $x(x^2 - 1)$  en serie de Fourier de exponenciales

$$x(x^2 - 1) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\pi x}$$

con

$$c_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x(x^2 - 1) e^{-in\pi x} dx$$

que tras reiteradas integraciones por partes nos conduce a

$$c_n = \begin{cases} 0 & n = 0, \\ -(-1)^n \frac{6i}{n^3 \pi^3} & n \neq 0. \end{cases}$$

Por tanto, la serie es

$$g(x) := x(x^2 - 1) = 12 \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} \frac{(-1)^n}{n^3 \pi^3} \operatorname{sen} n\pi x.$$

Ahora, el desarrollo en autofunciones de la solución

$$u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} v_n(t) \operatorname{sen} n\pi x$$

lleva a

$$\begin{cases} v_n'' = -n^2 \pi^2 v_n, \\ v_n(0) = 12 \frac{(-1)^n}{n^3 \pi^3}, \\ v_n'(0) = 0. \end{cases}$$

Por ello

$$v_n(t) = 12 \frac{(-1)^n}{n^3 \pi^3} \cos n\pi t$$

y la solución es

$$u(t, x) = 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3 \pi^3} \cos n\pi t \sin n\pi x.$$

Observando que podemos escribir

$$\cos n\pi t \sin n\pi x = \frac{1}{2} [\sin n\pi(x+t) + \sin n\pi(x-t)]$$

nos damos cuenta de que

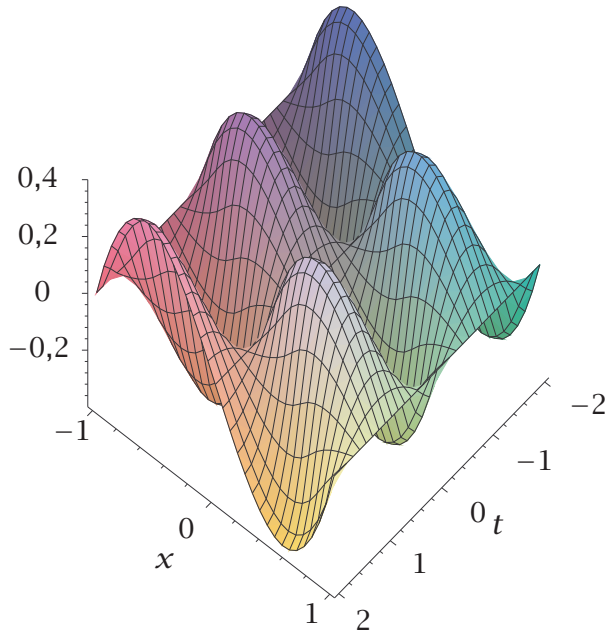
$$u(t, x) = \frac{1}{2} \left[ 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3 \pi^3} \sin n\pi(x+t) + 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3 \pi^3} \sin n\pi(x-t) \right].$$

Por tanto, podemos escribir

$$u(t, x) = \frac{g_{\text{per}}(x+t) + g_{\text{per}}(x-t)}{2}$$

donde  $g_{\text{per}}$  es la extensión periódica de  $g(x) = x^3 - x$  en  $[-1, 1]$  a  $\mathbb{R}$ . Tenemos pues la semi-suma de dos ondas viajeras con velocidades opuestas  $v_{\pm} = \pm 1$  y con la forma de la extensión periódica de la condición inicial de cada una de ellas.

El diagrama espacio-temporal de estas ondas es



### 3.5.3. El método de la transformada de Fourier

La transformada de Fourier aparece en los problemas que consideramos cuando los dominios espaciales no son acotados. En tales casos los conjuntos *continuos* de funciones trigonométricas de Fourier constituyen frecuentemente las autofunciones apropiadas en que basar el MDA. Además, en ocasiones es posible usar ambas transformadas, directa e inversa, para generar una expresión de la solución dependiente explícitamente de los datos del problema. Los ejemplos que vienen a continuación ilustran la manera de proceder en los casos más sencillos.

1. Consideremos un problema de condiciones iniciales para la ecuación del calor sobre toda la recta

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R} \\ u|_{t=0} = f(x). \end{cases}$$

En este ejemplo el problema de autovalores que hay que resolver para aplicar el MDA es

$$w_{xx} = -k^2 w, \quad x \in \mathbb{R},$$

que como sabemos no tiene soluciones en  $L^2(\mathbb{R})$ . Sin embargo las soluciones  $\{e^{ikx}\}_{k \in \mathbb{R}}$ , aún no siendo de cuadrado integrable, juegan el papel de base ortogonal generalizada y la propuesta del MDA es buscar una solución de la forma

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}} v(k, t) e^{ikx} dk.$$

Introduciendo esta expresión en la ecuación diferencial se obtiene

$$\int_{\mathbb{R}} [v_t(k, t) + a^2 k^2 v(k, t)] e^{ikx} dk = 0,$$

por ello imponemos

$$v_t(k, t) + a^2 k^2 v(k, t) = 0,$$

cuya solución general es

$$v(k, t) = c(k) e^{-a^2 k^2 t}.$$

Luego el MDA nos conduce a una solución de la forma

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}} c(k) e^{ikx - a^2 k^2 t} dk.$$

Haciendo  $t = 0$  en esta expresión e imponiendo la condición inicial para  $u$  obtenemos

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} c(k) e^{ikx} dk.$$

Es decir, deducimos que la función  $c = c(k)$  es la transformada de Fourier del dato inicial  $f = f(x)$ , y por tanto efectuando la transformada de Fourier inversa tenemos que

$$c(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ikx} dx.$$

Si llevamos esta fórmula, renombrando  $x \rightarrow x'$ , a la expresión de  $u(t, x)$ , se obtiene

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x') e^{ik(x-x')-a^2k^2t} dk dx'.$$

Podemos además efectuar la integración respecto de  $k$  utilizando la identidad

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ik(x-x')-a^2k^2t} dk = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-x')^2}{4a^2t}},$$

que se deduce inmediatamente, renombrando variables y parámetros, de la transformada de Fourier de la función gaussiana

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} e^{-a^2x^2} dx = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} e^{-\frac{k^2}{4a^2}}.$$

De esta manera encontramos la siguiente fórmula explícita de la solución del problema

$$u(t, x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} f(x') e^{-\frac{(x-x')^2}{4a^2t}} dx' \quad (3.36)$$

2. Es posible generalizar el resultado anterior al caso multidimensional

$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta u, & t > 0, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \\ u|_{t=0} = f(x), \end{cases} \quad (3.37)$$

En este ejemplo el problema de autovalores que hay que resolver para aplicar el MDA es

$$\Delta w = \lambda w, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Por las propiedades de la transformada de Fourier sabemos que las autofunciones  $\{e^{ik \cdot x}\}_{k=(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{R}^n}$ , forman una base ortogonal generalizada. El MDA nos lleva entonces a buscar una solución de la forma

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} v(k, t) e^{ik \cdot x} d^n k, \quad k \cdot x := \sum_{j=1}^n k_j x_j.$$

Introduciendo esta expresión en la ecuación diferencial se obtiene

$$\int_{\mathbb{R}^n} [v_t(k, t) + a^2 |k|^2 v(k, t)] e^{ik \cdot x} d^n k = 0,$$

e imponemos

$$v_t(k, t) + a^2 |k|^2 v(k, t) = 0,$$

cuya solución general es

$$v(k, t) = c(k) e^{-a^2 |k|^2 t}.$$

Luego el MDA produce una solución de la forma

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} c(k) e^{ik \cdot x - a^2 |k|^2 t} d^n k.$$

Haciendo  $t = 0$  obtenemos

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} c(k) e^{i k \cdot x} d^n k.$$

Por tanto efectuando la transformada de Fourier inversa

$$c(k) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i k \cdot x} d^n x.$$

Así la expresión de  $u(t, x)$  es

$$u(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x') e^{i k \cdot (x - x') - a^2 |k|^2 t} d^n k d^n x'.$$

La integración múltiple respecto de  $k = (k_1, \dots, k_n)$  se reduce a un producto de  $n$  integraciones simples dado que

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i k \cdot (x - x') - a^2 |k|^2 t} d^n k = \prod_{j=1}^n \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i k_j (x_j - x'_j) - a^2 k_j^2 t} d k_j,$$

luego utilizando la identidad

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i k_j (x_j - x'_j) - a^2 k_j^2 t} d k_j = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x_j - x'_j)^2}{4a^2 t}},$$

encontramos la siguiente fórmula explícita de la solución del problema

$$u(t, x) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x') e^{-\frac{|x - x'|^2}{4a^2 t}} d^n x' \quad (3.38)$$

3. Los resultados de los dos ejemplos anteriores pueden aplicarse para deducir fórmulas análogas para las soluciones de la ecuación de Schrödinger libre en cualquier dimensión

$$\begin{cases} i \hbar u_t = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta u, & t > 0, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \\ u|_{t=0} = f(x). \end{cases} \quad (3.39)$$

Obsérvese que este problema de condiciones iniciales para la ecuación de Schrödinger se obtiene de (3.37) simplemente tomando

$$a^2 = i \frac{\hbar}{2m}.$$

Por tanto haciendo esa identificación del parámetro  $a$  en (3.8) deducimos la siguiente expresión de la solución de (3.39)

$$u(t, x) = \left( \frac{m}{2\pi i \hbar t} \right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x') e^{i \frac{m|x - x'|^2}{2\hbar t}} d^n x' \quad (3.40)$$

4. Consideremos ahora el siguiente problema de condiciones iniciales para la ecuación de ondas

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R} \\ u|_{t=0} = f(x), \\ u_t|_{t=0} = g(x). \end{cases}$$

Podemos aplicar el MDA usando, como en el ejemplo de la ecuación del calor, las autofunciones  $\{e^{ikx}\}_{k \in \mathbb{R}}$  del problema espectral

$$w_{xx} = -k^2 w, \quad x \in \mathbb{R},$$

y buscando una solución del problema de valores iniciales de la forma

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}} v(k, t) e^{ikx} dk.$$

Introduciendo esta expresión en la ecuación de ondas obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}} [v_{tt}(k, t) + k^2 v(k, t)] e^{ikx} dk = 0,$$

por ello imponemos

$$v_{tt}(k, t) + k^2 v(k, t) = 0,$$

cuya solución general es

$$v(k, t) = A(k) e^{ikt} + B(k) e^{-ikt}.$$

Concluimos que el MDA lleva a una solución de la forma

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}} [A(k) e^{ik(x+t)} + B(k) e^{ik(x-t)}] dk,$$

luego la correspondiente derivada temporal será

$$u_t(t, x) = \int_{\mathbb{R}} ik [A(k) e^{ik(x+t)} - B(k) e^{ik(x-t)}] dk.$$

Así, para  $t = 0$  obtenemos

$$\begin{aligned} u(0, x) &= \int_{\mathbb{R}} [A(k) + B(k)] e^{ikx} dk, \\ u_t(0, x) &= \int_{\mathbb{R}} ik [A(k) - B(k)] e^{ikx} dk. \end{aligned}$$

Comparando con la transformada de Fourier de los datos iniciales  $\{f, g\}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(k) e^{ikx} dk, \\ g(x) &= \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(k) e^{ikx} dk, \end{aligned}$$

en donde los coeficientes serán

$$\begin{aligned}\hat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ikx} dx, \\ \hat{g}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-ikx} dx,\end{aligned}$$

concluimos que

$$\begin{cases} \hat{f}(k) = A(k) + B(k), \\ \hat{g}(k) = ik(A(k) - B(k)). \end{cases}$$

La solución de este sistema es

$$A(k) = \frac{1}{2} \left[ \hat{f}(k) + \frac{1}{ik} \hat{g}(k) \right], \quad B(k) = \frac{1}{2} \left[ \hat{f}(k) - \frac{1}{ik} \hat{g}(k) \right],$$

Por tanto, la solución del problema de Cauchy se escribe como

$$\begin{aligned}u(t, x) &= \frac{1}{2} \left[ \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(k) e^{ik(x+t)} dk + \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(k) e^{ik(x-t)} dk \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[ \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(k) \frac{1}{ik} e^{ik(x+t)} dk - \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(k) \frac{1}{ik} e^{ik(x-t)} dk \right].\end{aligned}$$

El primer corchete es

$$\frac{1}{2} [f(x+t) + f(x-t)]$$

en tanto que el segundo es un poco más complicado. Para analizarlo utilizamos la siguiente relación

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{ik} \hat{g}(k) e^{ikx} dk = \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(k) \left( \frac{1}{ik} + \int_0^x e^{ikx} dx \right) dk = \int_{\mathbb{R}} \frac{\hat{g}(k)}{ik} dk + \int_0^x g(x) dx, \quad (3.41)$$

para así obtener el siguiente valor para el segundo corchete

$$\frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(x) dx.$$

Reuniendo esta información recuperamos la **fórmula de d'Alembert** para la solución del problema de condiciones iniciales de la ecuación de ondas unidimensional

$$u(t, x) = \frac{1}{2} [f(x+t) + f(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(x) dx.$$

fórmula de  
d'Alembert

5. Por último, consideramos el siguiente problema de condiciones iniciales y de contorno para la ecuación del calor en una placa infinita de ancho  $L$

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u_{yy}, \\ u|_{t=0} = g(x, y) := \begin{cases} \sin \frac{\pi}{L} y & x \in [-1, 1], \\ 0 & x \notin [-1, 1], \end{cases} \\ \begin{cases} u|_{y=0} = 0, \\ u|_{y=L} = 0. \end{cases} \end{cases}$$

El problema espectral asociado es

$$\begin{aligned} -(w_{xx} + w_{yy}) &= \lambda w, \quad \lambda = k_1^2 + k_2^2 \\ \begin{cases} w|_{y=0} = 0, \\ w|_{y=L} = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Que, a su vez, es un problema de contorno homogéneo, para la ecuación de Helmholtz bidimensional, en la que podemos separar variables en coordenadas cartesianas. Así, las soluciones las escribimos como

$$w(x, y) = (a_1 e^{ik_1 x} + b_1 e^{-ik_1 x}) (a_2 e^{ik_2 y} + b_2 e^{-ik_2 y})$$

e imponemos las condiciones de contorno que implican

$$\begin{cases} a_2 + b_2 = 0, \\ e^{ik_2 L} a_2 + e^{-ik_2 L} b_2 = 0. \end{cases}$$

Soluciones no nulas de este sistema existen siempre que

$$k_2 = n \frac{\pi}{L}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Por tanto, los autovalores son

$$\left\{ k^2 + n^2 \frac{\pi^2}{L^2} \right\}_{k \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}}$$

y las correspondientes autofunciones

$$\left\{ e^{ikx} \sin n \frac{\pi}{L} y \right\}_{k \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}}.$$

Observemos, que aparecen un conjunto continuo de autovalores, ya que en la variable  $x$  no tenemos condiciones de contorno. El autovalor asociado  $k^2$  lo hemos escogido real.

La solución se expresará según el MDA como

$$u(t, x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} v_n(k, t) e^{ikx} \sin n \frac{\pi}{L} y \, dk.$$

Introduciendo esta expresión en la EDP se obtiene la siguiente EDO para  $v_n(k, t)$

$$\frac{\partial v_n}{\partial t}(k, t) + \left( k^2 + n^2 \frac{\pi^2}{L^2} \right) v_n(k, t) = 0$$

cuya solución es

$$v_n(k, t) = a_n e^{-(k^2 + n^2 \frac{\pi^2}{L^2})t}.$$

Para saber que autofunciones intervienen en este desarrollo analizamos los desarrollos correspondientes de las inhomogeneidades. En este caso sólo es la



función  $g(x, y)$ , cuya forma indica que se va a poder expresar en términos de  $\{e^{ikx} \sin \frac{\pi}{L} y\}_{k \in \mathbb{R}}$  únicamente. Así

$$g(x, y) = \int_{\mathbb{R}} c(k) e^{ikx} dk \sin \frac{\pi}{L} y$$

en donde

$$c(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 e^{-ikx} dx = \frac{\sin k}{\pi k}.$$

Esto es,

$$g(x, y) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin k}{\pi k} e^{ikx} dk \sin \frac{\pi}{L} y.$$

Por ello, la solución es

$$u(t, x, y) = e^{-\frac{\pi^2}{L^2} t} \sin \frac{\pi}{L} y \int_{\mathbb{R}} e^{-k^2 t} \frac{\sin k}{\pi k} e^{ikx} dk.$$

Evaluamos ahora la integral

$$I(x, t) := \int_{\mathbb{R}} e^{-k^2 t} \frac{\sin k}{\pi k} e^{ikx} dk$$

que escribimos como

$$I(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-k^2 t} \frac{1}{ik} (e^{ik(x+1)} - e^{ik(x-1)}) = J(x+1, t) - J(x-1, t)$$

donde

$$J(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-k^2 t} \frac{1}{ik} e^{ikx} dk.$$

Usamos ahora (3.41) para escribir

$$J(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-k^2 t}}{ik} dk + \int_0^x \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-k^2 t} e^{ikx} dk \right] dx.$$

Como sabemos del anterior capítulo la transformada Fourier de una gaussiana es otra gaussiana. La función error

$$\operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi$$

permite escribir finalmente

$$I(x, t) = \frac{1}{2} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{x+1}{2\sqrt{t}} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{x-1}{2\sqrt{t}} \right) \right].$$

Por ello, la solución es

$$u(t, x, y) = \frac{1}{2} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{x+1}{2\sqrt{t}} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{x-1}{2\sqrt{t}} \right) \right] e^{-\frac{\pi^2}{L^2} t} \sin \frac{\pi}{L} y.$$

Debemos observar que si  $x > 0$  tenemos

$$\operatorname{erf}(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}x} e^{-x^2} \left( 1 - \mathcal{O} \left( \frac{1}{x^2} \right) \right), \quad x \rightarrow \infty$$

y que

$$\operatorname{erf}(x) = -\operatorname{erf}(-x).$$

Por tanto, cuando  $t \rightarrow 0^+$  la función

$$\frac{1}{2} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{x+1}{2\sqrt{t}} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{x-1}{2\sqrt{t}} \right) \right]$$

tiende 0 si  $x \notin [-1, 1]$  ( $x-1$  y  $x+1$  tienen el mismo signo) y a 1 si  $x \in [-1, 1]$  ( $x-1$  y  $x+1$  tienen signos opuestos).

### 3.6. Problemas de contorno en electrostática y mecánica de fluidos

método de desarrollo en autofunciones en problemas de contorno en electrostática y mecánica de fluidos

En electrostática el potencial eléctrico satisface el problema de contorno

$$\begin{aligned} \Delta u &= \rho, \\ a_i(u) &= g_i, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Aquí  $\rho$  representa la distribución de carga. Por otro lado, en mecánica de fluidos perfectos el potencial de velocidades está determinado por

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, \\ a_i(u) &= g_i, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

#### 3.6.1. Unicidad

Discutiremos en primer lugar el problema de la unicidad para los problemas

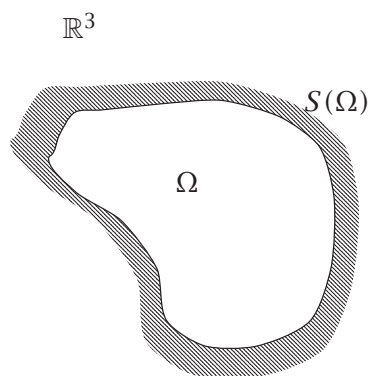
$$\begin{cases} \Delta u = \rho, \\ u|_{S(\Omega)} = g \end{cases}$$

y

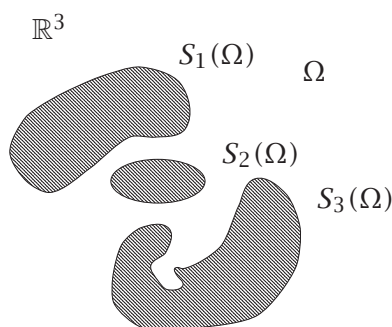
$$\begin{cases} \Delta u = \rho, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{S(\Omega)} = g. \end{cases}$$

Estamos pues considerando el problema de Dirichlet o el de Neumann para la ecuación de Poisson. Buscamos soluciones clásicas  $u \in C^2(\overline{\Omega})$ . Aquí el dominio  $\Omega$  es, como sabemos una región abierta conexa de  $\mathbb{R}^3$ , sin embargo se puede dar dos circunstancias:

- **Problema interior:**  $\Omega$  es conjunto acotado de  $\mathbb{R}^3$ .



- **Problema exterior:**  $\Omega$  es un conjunto no acotado y su complementario lo es.



Debemos recordar el **teorema de Gauss de la divergencia** que nos asegura que

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{A} \, d^3x = \int_{S(\Omega)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}.$$

Aplicándolo a  $\mathbf{A} = u \nabla u$ , como

$$\nabla \cdot (u \nabla u) = \nabla u \cdot \nabla u + u \Delta u$$

obtenemos la identidad de Green

$$\int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + u \Delta u) \, d^3x = \int_{S(\Omega)} u \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \, dS.$$

**Unicidad del problema interior** Supongamos dos soluciones  $u_1$  y  $u_2$  del problema de contorno de Dirichlet o de Neumann. La función diferencia  $u = u_1 - u_2$  satisface

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ u|_{S(\Omega)} = 0 \end{cases}$$

ó

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{S(\Omega)} = 0, \end{cases}$$

respectivamente. Aplicando la identidad de Green a esta función tenemos

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 d^3 x = 0$$

por ello  $\nabla u = \mathbf{0}$  en un conjunto conexo  $\Omega$  por lo que  $u$  es una función constante en  $\Omega$ . Para el problema de Dirichlet como  $u$  se anula en la frontera dicha constante es cero. Por tanto, concluimos

**Teorema 3.6.1.** ■ *El problema de Dirichlet interior admite a lo sumo una solución.*

■ *En el problema de Neumann interior dos soluciones distintas se diferencian en una constante.*

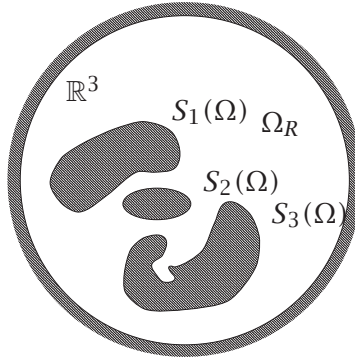
**Unicidad del problema exterior** Ahora  $\Omega$  no es acotado y no podemos aplicar a la ligera la identidad de Green a la función diferencia  $u = u_1 - u_2$  de dos soluciones. Por ello, cambiamos a un dominio que denotaremos por  $\Omega_R$  y que describimos a continuación. El complementario  $\Omega^c := \mathbb{R}^3 \setminus \Omega$  de  $\Omega$  es un conjunto acotado, luego existe un  $R_0 > 0$  tal que si  $R > R_0 \Rightarrow \Omega^c \subset B(0, R)$ , aquí  $B(0, R) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\| < R\}$  es la bola de radio  $R$  en el origen. Pues bien, denotamos

$$\Omega_R := B(0, R) \setminus \Omega^c,$$

y su frontera es

$$S(\Omega_R) = S_1(\Omega) \cup S_2(\Omega) \cup \dots \cup S_m(\Omega) \cup S(0, R)$$

donde  $S(0, R) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\| = R\}$  es la esfera de radio  $R$  centrada en origen. En la siguiente figura ilustra la geometría de este conjunto



Aplicando la identidad de Green a  $u$  en  $\Omega_R$  obtenemos

$$\int_{\Omega_R} |\nabla u|^2 d^3 x = \int_{S(0, R)} u \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS$$

y recordando que la derivada normal sobre la esfera es  $u_r$ , nos lleva a

$$\int_{\Omega_R} |\nabla u|^2 d^3 x = \int_{S(0, R)} u u_r dS.$$

La integral de superficie la podemos acotar como sigue

$$\left| \int_{S(0,R)} u u_r \, dS \right| \leq 4\pi R^2 \max_{S(0,R)} |u u_r|,$$

y suponiendo que

$$u = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow \infty,$$

y que por tanto  $u_r = \mathcal{O}(r^{-2})$ , lleva a

$$\int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 \, d^3 x = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Omega_R} \|\nabla u\|^2 \, d^3 x \leq C \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} = 0.$$

**Teorema 3.6.2.** *Por tanto, para asegurar la unicidad en el problema de Dirichlet exterior y la unicidad salvo constante en el problema de Neumann exterior es necesario exigir que en el infinito las soluciones satisfagan la condición*

$$u \sim f(r, \theta, \phi) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow \infty.$$

### 3.6.2. El MDA en problemas de electrostática y mecánica de fluidos con simetría esférica

En electrostática es frecuente encontrar problemas de contorno del tipo

$$\begin{aligned} \Delta u &= \rho, \\ a_i(u) &= g_i, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

en donde  $\rho$  es la densidad de carga,  $u$  el potencial eléctrico, y por tanto el campo eléctrico es  $\mathbf{E} = -\nabla u$ , y los operadores de frontera  $a_i$  sólo actúan sobre  $r$  y  $g_i = g_i(\theta, \phi)$ . Un problema similar también aparece en la mecánica de fluidos

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, \\ a_i(u) &= g_i, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

donde  $u$  es el potencial de velocidades del fluido, y por ello la velocidad es  $\mathbf{v} = \nabla u$ . La ecuación de Poisson en coordenadas esféricas se escribe como sigue

$$\frac{1}{r}(ru)_{rr} + \frac{1}{r^2 \sin \theta}(\sin \theta u_\theta)_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}u_{\phi\phi} = \rho(r, \theta, \phi).$$

Para aplicar el MDA escribimos la ecuación de Poisson como

$$(A + B)u = r^2 \rho$$

donde

$$\begin{aligned} Au &:= r^2 u_{rr} + 2r u_r, \\ Bu &:= \frac{1}{\sin \theta}(\sin \theta u_\theta)_\theta + \frac{1}{\sin^2 \theta}u_{\phi\phi}. \end{aligned}$$

Vemos que sólo hay condiciones de contorno del primer tipo y que tanto los términos tipo  $b_j$  como  $h_j$  están ausentes. El operador  $B$  es simétrico en  $C^\infty(S^2)$  y el correspondiente problema de autovalores se resuelve como sigue

$$BY_{l,m} = -l(l+1)Y_{l,m}, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad m = -l, \dots, l.$$

Como sabemos los armónicos esféricos forman un conjunto completo en  $L^2(S^2)$  y por ello siempre podemos desarrollar

$$\begin{aligned} r^2 \rho(r, \theta, \phi) &= \sum_{l,m} \rho_{lm} Y_{l,m}(\theta, \phi), \\ g_i(\theta, \phi) &= \sum_{l,m} c_{ilm} Y_{l,m} \end{aligned}$$

Por tanto, el MDA busca soluciones en la forma

$$u(r, \theta, \phi) = \sum_{l,m} v_{lm} Y_{l,m}(\theta, \phi).$$

donde  $v_{lm}$  se encuentran determinados por

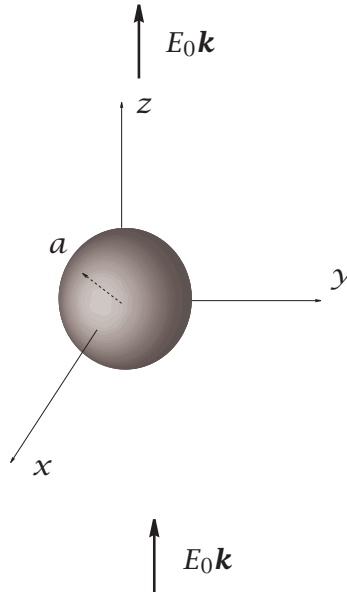
$$r^2 v_{lm}'' + 2r v_{lm}' - l(l+1)v_{lm} = \rho_{lm}$$

que en el caso homogéneo,  $\rho = 0$ , correspondiente a la ecuación de Laplace, tiene como solución a

$$v_{lm}(r) = A_{l,m} r^l + \frac{B_{lm}}{r^{l+1}}.$$

### 3.6.3. Esfera conductora cargada en equilibrio electrostático en un campo eléctrico constante

Consideremos una esfera conductora en equilibrio de radio  $a$  y carga  $Q$  centrada en el origen en el seno de un campo eléctrico constante  $E_0 \mathbf{k}$ . Como sabemos el equilibrio se alcanza si el potencial sobre la esfera es constante, digamos  $u_0$ . La siguiente figura ilustra esta situación



El potencial electrostático  $u$  es solución del siguiente problema de contorno para la ecuación de Laplace

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ \int u|_{r=a} = u_0, \\ u \sim -E_0 z + V_0 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Aplicando el MDA, buscamos una solución de la forma

$$u(r, \theta, \phi) = \sum_{\ell, m} \left( A_{\ell, m} r^\ell + B_{\ell, m} \frac{1}{r^{\ell+1}} \right) Y_{\ell, m}(\theta, \phi).$$

La condición de contorno en  $r = a$  se puede escribir

$$u|_{r=a} = u_0 \sqrt{4\pi} Y_{0,0},$$

en tanto que, como  $z = r \cos \theta$ , la condición en el infinito es

$$u \sim -E_0 r \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{1,0}(\theta, \phi) + V_0 \sqrt{4\pi} Y_{0,0} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right).$$

Así pues, podemos restringirnos a un desarrollo

$$u(r, \theta, \phi) = \left( A_{0,0} + B_{0,0} \frac{1}{r} \right) Y_{0,0}(\theta, \phi) + \left( A_{1,0} r + B_{1,0} \frac{1}{r^2} \right) Y_{1,0}(\theta, \phi).$$

Imponemos ahora las condiciones de contorno para obtener

$$\begin{cases} A_{0,0} + B_{0,0} \frac{1}{a} = \sqrt{4\pi} u_0, \\ A_{1,0} a + B_{1,0} \frac{1}{a^2} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} A_{0,0} = \sqrt{4\pi} V_0, \\ A_{1,0} = -\sqrt{\frac{4\pi}{3}} E_0. \end{cases}$$

Por tanto,

$$u(r, \theta, \phi) = V_0 + \frac{(u_0 - V_0)a}{r} - E_0 \left( r - \frac{a^3}{r^2} \right) \cos \theta. \quad (3.42)$$

El potencial dado en (3.42) se compone de un término monopolar

$$\frac{(u_0 - V_0)a}{r}$$

y un término dipolar

$$-E_0 \left( r - \frac{a^3}{r^2} \right) \cos \theta.$$

El momento monopolar es  $4\pi\epsilon_0(u_0 - V_0)a$  y la carga neta es  $Q = (u_0 - V_0)a$ . Por ello, el potencial es

$$u(r, \theta, \phi) = V_0 + \frac{Q}{r} - E_0 \left( r - \frac{a^3}{r^2} \right) \cos \theta.$$

El campo eléctrico  $\mathbf{E} = -\nabla u$

$$\mathbf{E} := \left[ \frac{Q}{r^2} + E_0 \left( 1 + 2\frac{a^3}{r^3} \right) \cos \theta \right] \mathbf{u}_r - E_0 \left( 1 - \frac{a^3}{r^3} \right) \sin \theta \mathbf{u}_\theta.$$

El momento dipolar de la esfera es

$$p = 4\pi\epsilon_0 a^3 E_0$$

y por ello la polarizabilidad de la esfera es  $\alpha = 4\pi\epsilon_0 a^3$ .

Al ser  $E_r$  la componente normal del campo eléctrico sobre la esfera la densidad de carga sobre la superficie de ésta es

$$\sigma(\theta) = \epsilon_0 E_r = \epsilon_0 \left[ \frac{Q}{a^2} + 3E_0 \cos \theta \right].$$

El potencial de referencia  $V_0$  (que, por tanto, podíamos tomar como cero) es el potencial en el plano  $xy$  en regiones alejadas del origen, y de hecho se puede tomar como el potencial de tierra, por ello si conectamos la esfera a tierra,  $(u_0 - V_0)a = Q = 0$ , entonces la esfera es neutra con carga total nula.

Los puntos donde el campo eléctrico se anula son relevantes en el estudio de las superficies equipotenciales, ya que allí la superficie ya no es regular. La componente  $E_\theta$  de  $\mathbf{E} = E_r \mathbf{u}_r + E_\theta \mathbf{u}_\theta$  se anula sólo si

- $r = a$  ó
- $\theta = 0, \pi$

Analizamos ahora la anulación de  $E_r$  en cada uno de estos casos

- El campo eléctrico se anula en la esfera  $r = a$  siempre que  $\theta$  satisfaga

$$\frac{Q}{a^2} + 3E_0 \cos \theta = 0,$$

esto es

$$\theta^* = \arccos \frac{Q}{3a^2 E_0}.$$

Por tanto si

$$\left| \frac{Q}{3a^2 E_0} \right| < 1,$$

el campo eléctrico sólo se anula en un círculo sobre la superficie esférica con  $\theta = \theta^*$ . Si

$$Q = \pm 3a^2 E_0$$

entonces el campo eléctrico sólo se anula en los polos norte y sur de la esfera, respectivamente. Cuando

$$\left| \frac{Q}{3a^2 E_0} \right| > 1,$$

la situación cambia y el campo eléctrico no se puede anular sobre la esfera.

- En este segundo caso el campo eléctrico se anula para  $\theta = 0, \pi$  siempre que  $r$  satisfaga

$$P(r) := r^3 \pm \frac{Q}{E_0} r + 2a^3 = 0,$$

respectivamente. Pasamos ahora analizar las raíces de esta ecuación. La función  $P(r)$  es una cúbica con

$$P \rightarrow \pm \infty, \quad r \rightarrow \pm \infty,$$



poseyendo por ello al menos una raíz real; y extremos en

$$3r^2 \pm \frac{Q}{E_0} = 0.$$

Los extremos serán reales sí y sólo si

$$\frac{Q}{E_0} \leq 0,$$

respectivamente. En este caso tendremos un mínimo y un máximo localizados en

$$r_{\pm}^* = \pm \sqrt{\left| \frac{Q}{3E_0} \right|}.$$

En caso contrario la función  $P$  es siempre creciente y por ello sólo posee una única raíz real que es negativa, ya que  $P(0) = 2a^3 > 0$ . En el caso de dos extremos para  $P(r)$ , en el intervalo  $(r_-^*, r_+^*)$  la función es decreciente y como  $P(0) > 0$  se tiene  $P(r_-^*) > 0$ . Por ello, la condición para que existan dos raíces reales es

$$P(r_+^*) = 0,$$

y para que haya tres raíces reales

$$P(r_+^*) < 0,$$

evaluamos el valor de  $P$  en  $r_+^*$ , obteniendo

$$P(r_+^*) = -2 \left( \left| \frac{Q}{3E_0} \right| \right)^{3/2} + 2a^3.$$

Así, tendremos dos raíces reales (una negativa y otra positiva ( $P(0) > 0$ )) si

$$\left| \frac{Q}{3E_0 a^2} \right| = 1$$

y tres raíces reales (una negativa y dos positivas ( $P(0) > 0$ )) si

$$\left| \frac{Q}{3E_0 a^2} \right| > 1.$$

Ocurre que si

$$\left| \frac{Q}{3E_0 a^2} \right| = 1$$

el valor  $r = a$  es raíz. Por otro lado si

$$\left| \frac{Q}{3E_0 a^2} \right| > 1 \Rightarrow r_+^* > a$$

y existe alguna raíz mayor que  $a$ , y como

$$P(a) = 3a^3 \left( 1 - \left| \frac{Q}{3E_0 a^2} \right| \right) < 0$$

sólo existe una mayor que  $a$ .

Resumiendo, para  $r > a$  el campo eléctrico sólo se anula en punto si y sólo si

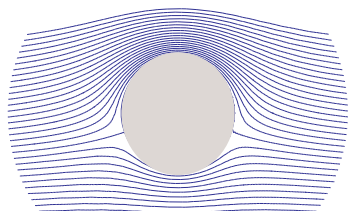
$$\left| \frac{Q}{3E_0 a^2} \right| > 1,$$

este punto yace sobre el eje  $z$ .

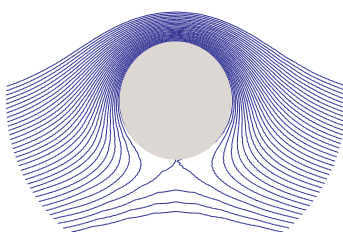
La estructura de las curvas equipotenciales cambia según

$$\left| \frac{Q}{3E_0 a^2} \right| \leq 1.$$

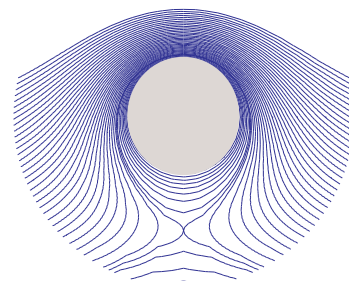
A continuación mostramos los diferentes casos



$$\left| \frac{Q}{3E_0 a^2} \right| < 1$$



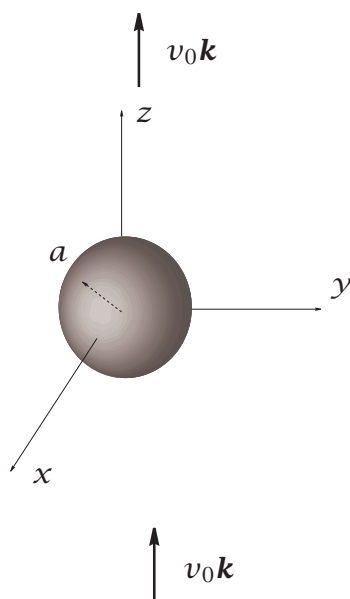
$$\left| \frac{Q}{3E_0 a^2} \right| = 1$$



$$\left| \frac{Q}{3E_0 a^2} \right| > 1$$

### 3.6.4. Fluido en movimiento uniforme deformado por una bola esférica

Consideremos ahora un fluido en movimiento uniforme en el cual sumergimos una esfera sólida de radio  $a$  figura



El potencial de velocidades debe satisfacer el siguiente problema de contorno

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, \\ u_r|_{r=a} &= 0, \\ u &\sim v_0 z + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Como en el problema anterior buscamos una solución de la forma

$$u(r, \theta, \phi) = \sum_{\ell, m} \left( A_{\ell, m} r^\ell + B_{\ell, m} \frac{1}{r^{\ell+1}} \right) Y_{\ell, m}(\theta, \phi).$$

Además las condiciones de contorno en  $r = a$  y en el infinito se puede escribir

$$u_r|_{r=a} = 0, \\ u \sim v_0 r \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{1,0}(\theta, \phi) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow \infty.$$

Así pues, nos restringimos a soluciones de la forma

$$u(r, \theta, \phi) = \left( A_{1,0} r + B_{1,0} \frac{1}{r^2} \right) Y_{1,0}(\theta, \phi).$$

Imponiendo las condiciones de contorno

$$\begin{cases} A_{1,0} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} v_0, \\ A_{1,0} - 2B_{1,0} \frac{1}{a^3} = 0. \end{cases}$$

Por ello,

$$B_{1,0} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4\pi}{3}} v_0 a^3.$$

Así

$$u(r, \theta, \phi) = v_0 \left( r + \frac{a^3}{2r^2} \right) \cos \theta$$

y la velocidad es

$$\mathbf{v} = v_0 \left( \left[ 1 - \frac{a^3}{r^3} \right] \cos \theta \mathbf{u}_r - \left[ 1 + \frac{a^3}{2r^3} \right] \sin \theta \mathbf{u}_\theta \right).$$

### 3.7. Cuestiones, problemas y ejercicios

#### 3.7.1. Cuestiones

1. Determinar cual de las opciones siguientes corresponde a las ondas estacionarias, en coordenadas esféricas,  $u(t, r, \theta, \phi) = e^{-i\omega t} w(r, \theta, \phi)$  de la siguiente ecuación de ondas

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u, & r < a, \\ u|_{r=a} = 0. \end{cases}$$

- a)  $(j_l(kr) + n_l(kr))Y_{l,m}(\theta, \phi)$  con  $j_l(ka) + n_l(ka) = 0$  y  $\omega = k^2$
- b)  $j_l(kr)Y_{l,m}(\theta, \phi)$  con  $j_l(ka) = 0$  y  $\omega = \pm k$
- c)  $n_l(kr)Y_{l,m}(\theta, \phi)$  con  $j_l(ka) = 0$  y  $\omega = \pm k$
- d)  $j_l(kr)Y_{l,m}(\theta, \phi)$  con  $j_l(ka) = 0$  y  $\omega = k^2$
- e)  $(j_l(kr) + n_l(kr))Y_{l,m}(\theta, \phi)$  con  $j_l(ka) + n_l(ka) = 0$  y  $\omega = \pm k$

**Resolución** Las ondas estacionarias se obtienen al plantear la separación de variables  $u(t, r, \theta, \phi) = e^{-i\omega t} w(r, \theta, \phi)$ , donde se satisfacen las siguientes relación de dispersión y ecuación de Helmholtz

$$\omega = \pm k, \quad \Delta w + k^2 w = 0.$$

La relación de dispersión descarta las posibilidades (a) y (d). Las opciones (b), (c) y (e), aparte de plantear la relación de dispersión correcta, son soluciones todas ellas de la ecuación de Helmholtz y, salvo la opción (c), cumplen la condición de contorno en  $r = a$ . Sin embargo, debemos imponer la condición de regularidad en  $r = 0$  que descarta la opción (e) siendo la alternativa (b) la correcta.

2. Determinar cual de las opciones siguientes corresponde a las soluciones regulares, en coordenadas cilíndricas,  $u(r, \theta, z)$  del problema de Neumann siguiente

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < a, \\ \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0. \end{cases}$$

- a)  $J_m(\alpha r) \cos(m\theta) e^{\alpha z}$  con  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $J'_m(\alpha a) = 0$
- b)  $N_m(\alpha r) \sin(m\theta) e^{\alpha z}$  con  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $J'_m(\alpha a) = 0$
- c)  $(J_m(\alpha r) - N_m(\alpha r)) \cos(m\theta) \cosh(\alpha z)$  con  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $J'_m(\alpha a) = N'_m(\alpha a)$
- d)  $J_m(\alpha r) \cos(m\theta) e^{\alpha z}$  con  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $J_m(\alpha a) = 0$
- e)  $N_m(\alpha r) e^{im\theta} e^{\alpha z}$  con  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $N_m(\alpha a) = 0$

**Resolución** Las funciones en las opciones (b), (c) y (e) no son regulares, la opción (d) no cumple las condiciones de contorno. Sólo la opción (a) satisface todos los requerimientos.

3. Hallar el valor de la constante  $a$  para el que existe solución del siguiente problema de contorno en coordenadas esféricas

$$\begin{cases} \Delta u = 1, & r < 1, \\ \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=1} = a. \end{cases}$$

- a) 0
- b) 1/2
- c) 1/3
- d) 1/4
- e) 1

**Ayuda:** Usar el teorema de la divergencia.

**Resolución** Aplicando el teorema de la divergencia en la bola  $B(0, 1)$ , tenemos

$$\int_{B(0,1)} \Delta u \, d^3 \mathbf{x} = \int_{S(0,1)} \nabla u \cdot d\mathbf{S}$$

como  $\Delta u = 1$  y  $u_r dS = \nabla u \cdot d\mathbf{S}$  concluimos

$$\frac{4}{3}\pi = a4\pi$$

y por ello  $a = 1/3$ .

### 3.7.2. Problemas

1. Encontrar, usando la transformada de Fourier, la solución del siguiente problema de valores iniciales para la ecuación del calor en la recta

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & t > 0, -\infty < x < \infty, \\ u|_{t=0} = x e^{-|x|}. \end{cases}$$

**Resolución** Utilizando la transformada de Fourier, a modo de MDA, obtenemos

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}} c(k) e^{-k^2 t} e^{ikx} \, dk.$$

Para satisfacer la condición inicial debemos hallar la transformada de Fourier de

$$g(x) := x e^{-|x|}.$$

Así,

$$\begin{aligned} c(k) &= \mathcal{F}(g) = i D_k \mathcal{F}(e^{-|x|}) = \frac{1}{2\pi} i D_k \left[ \int_{-\infty}^0 e^{(1-ik)x} \, dx + \int_0^{\infty} e^{(-1-ik)x} \, dx \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} i D_k \left( \frac{1}{1-ik} + \frac{1}{1+ik} \right). \end{aligned}$$

Esto es,

$$c(k) = i D_k \frac{1}{2\pi} \frac{2}{1+k^2} = -\frac{2ik}{\pi(1+k^2)^2}.$$

Por tanto, la solución buscada es

$$u(t, x) = -\frac{2i}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{k}{(1+k^2)^2} e^{-k^2 t} e^{ikx} \, dk.$$

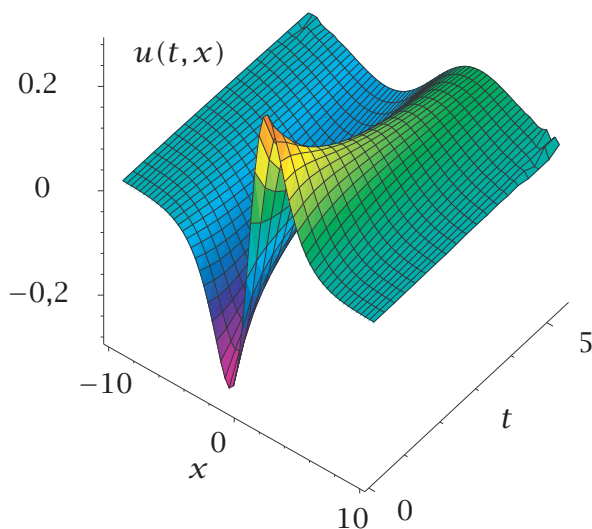
Un resultado más explícito para la solución se obtiene aplicando la fórmula (3.36) a nuestro problema, el resultado es

$$u(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} x' e^{-|x'|} e^{-\frac{(x'-x)^2}{4t}} \, dx'.$$

Para efectuar esta integral procedemos como sigue. Observemos que  $u(t, x) = F(t, x) - F(t, -x)$  donde  $F(t, x) := \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty x' e^{-x' - \frac{(x'-x)^2}{4t}} dx'$ . Teniendo en cuenta que  $-2t \left( e^{-\frac{(x'-x)^2}{4t}} \right)'_x = (x' - x) e^{-\frac{(x'-x)^2}{4t}}$  podemos, realizando una integración por partes, escribir  $F(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \left[ \left( \frac{x}{2} - t \right) G(t, x) + t e^{-\frac{x^2}{4t}} \right]$ , donde  $G(t, x) := \int_0^\infty e^{-x' - \frac{(x'-x)^2}{4t}} dx'$ . Por último, si en la integral que define a  $G$  realizamos el cambio de variable  $s = \frac{x'-x}{2\sqrt{t}} + \sqrt{t}$  llegamos a  $G(t, x) = 2\sqrt{t} e^{-x+t} \int_{-\frac{x-2t}{2\sqrt{t}}}^\infty e^{-s^2} ds$ . La función error  $\operatorname{erf} x := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-s^2} ds$  permite expresar  $G(t, x) = \sqrt{\pi t} e^{-x+t} \left( 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{x-2t}{2\sqrt{t}} \right) \right)$ . Por tanto,

$$u(t, x) = \left( \frac{x}{2} - t \right) e^{-x+t} \left( 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{x-2t}{2\sqrt{t}} \right) \right) + \left( \frac{x}{2} + t \right) e^{x+t} \left( 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{x+2t}{2\sqrt{t}} \right) \right).$$

A continuación mostramos la evolución espacio-temporal de la temperatura  $u(t, x)$ .



2. Resolver, por el método de desarrollo en autofunciones, el siguiente problema de contorno y condiciones iniciales para la ecuación de ondas

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & t > 0, -1 < x < 1, \\ u|_{t=0} = \sin \pi x, \\ u_t|_{t=0} = |x|, \\ u|_{x=-1} = u|_{x=1}, \\ u_x|_{x=-1} = u_x|_{x=1}. \end{cases}$$

**Resolución** Para aplicar el MDA debemos considerar el siguiente problema de autovalores

$$\begin{cases} -w_{xx} = \lambda w, & x \in [-1, 1] \\ w|_{x=-1} = w|_{x=1}, \\ w_x|_{x=-1} = w_x|_{x=1}. \end{cases}$$

Los correspondientes autovalores son  $\lambda_n = n^2\pi^2$  con autofunciones dadas por  $\{1, \cos n\pi x, \sin n\pi x\}_{n=1}^{\infty}$ . El desarrollo en autofunciones de la solución  $u(t, x)$  es  $u(t, x) = v_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} (v_n(t) \cos n\pi x + \tilde{v}_n(t) \sin n\pi x)$ . Al introducir esta expresión en la ecuación de ondas y desacoplar los diferentes modos obtenemos  $v_{0,tt} = 0$ ,  $v_{n,tt} + n^2\pi^2 v_n = 0$  y  $\tilde{v}_{n,tt} + n^2\pi^2 \tilde{v}_n = 0$ , que nos conduce a

$$\begin{cases} v_0(t) = A_0 + B_0 t, \\ v_n(t) = A_n \cos n\pi t + B_n \sin n\pi t, & n = 1, 2, \dots, \\ \tilde{v}_n(t) = \tilde{A}_n \cos n\pi t + \tilde{B}_n \sin n\pi t, & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Debemos desarrollar ahora las condiciones iniciales. Como  $u|_{t=0} = f(x) := \sin \pi x$  ya está desarrollada basta con calcular el desarrollo de Fourier de  $u_t|_{t=0} = g(x) := |x|$ . Al ser la función  $g(x)$  par en  $[-1, 1]$  su desarrollo se reduce a un desarrollo en cosenos. Los correspondientes coeficientes serán

$$\begin{cases} a_0 = 2 \int_0^1 x \, dx = 1, \\ a_n = 2 \int_0^1 x \cos n\pi x \, dx = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es par.} \\ -\frac{4}{\pi^2 n^2}, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases} \end{cases}$$

Luego en el desarrollo en autofunciones de  $u(t, x)$  sólo deben aparecer  $1, \{\cos(2n+1)\pi x\}_{n=0}^{\infty}, \sin \pi x$ , y por tanto los únicos coeficientes no nulos son  $v_0, \{v_{2n+1}\}_{n=0}^{\infty}, \tilde{v}_1$ . Por todo ello,

$$\begin{cases} A_0 = v_0(0) = 0, & B_0 = v'_0(0) = \frac{1}{2}, \\ A_{2n+1} = v_{2n+1}(0) = 0, & (2n+1)\pi B_{2n+1} = v'_{2n+1}(0) = -\frac{4}{\pi^2(2n+1)^2}, \\ \tilde{A}_1 = \tilde{v}_1(0) = 1, & \pi \tilde{B}_1 = \tilde{v}'_1 = 0, \end{cases}$$

con  $n = 0, 1, \dots$ . Lo que conduce a

$$u(t, x) = \frac{t}{2} - \frac{4}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \sin((2n+1)\pi t) \cos((2n+1)\pi x) + \cos(\pi t) \sin(\pi x).$$

**Éste es el resultado pedido.**

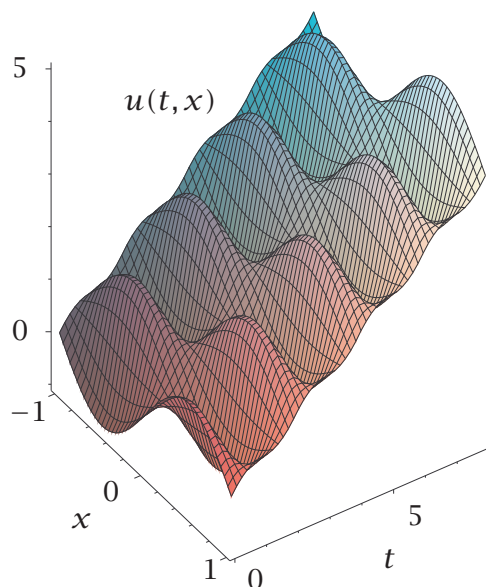
Podemos entender mejor este resultado como sigue. Utilizando las fórmulas trigonométricas para los productos obtenemos

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{1}{2}(\sin(\pi(x-t)) + \sin(\pi(x+t))) \\ &+ \frac{1}{2} \left[ t - \frac{4}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} (\sin((2n+1)\pi(x+t)) - \sin((2n+1)\pi(x-t))) \right]. \end{aligned}$$

La serie de Fourier  $\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos((2n+1)\pi x)$  converge puntualmente, según el teorema de Dirichlet, para todo  $x \in \mathbb{R}$  a la extensión periódica  $g_{\text{per}}(x)$  de  $g(x)$ ,  $x \in [-1, 1]$ . Integrando término a término uno obtiene la serie de Fourier  $\frac{x}{2} - \frac{4}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \sin((2n+1)\pi x)$  que se puede demostrar converge puntualmente a  $\int_0^x g_{\text{per}}(s) \, ds$ . Así la serie de Fourier hallada para  $u(t, x)$  corresponde a la siguiente fórmula de d'Alembert

$$u(t, x) = \frac{f_{\text{per}}(x+t) + f_{\text{per}}(x-t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g_{\text{per}}(s) \, ds.$$

La serie de Fourier converge rápidamente, basta con dos términos de la serie para aproximar bastante bien la solución. A la derecha mostramos un diagrama espacio-temporal de la onda, en la que hemos aproximado la serie de Fourier por su suma parcial a 4 términos, el resultado exacto es prácticamente el mismo.



3. Resolver, por el método de separación de variables en coordenadas cilíndricas, el siguiente problema de contorno

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 1 < r < 2, \\ u|_{r=1} = u|_{r=2}. \end{cases}$$

**Resolución** Como sabemos la resolución por separación de variables en coordenadas cilíndricas de la ecuación de Laplace conduce a considerar

$$u(r, \theta, z) = R_{\alpha, m}(r) \Theta_m(\theta) Z_{\alpha}(z),$$

donde

$$\begin{cases} Z_{\alpha}(z) = A e^{\alpha z} + B e^{-\alpha z}, \\ \Theta_m(\theta) = C e^{i m \theta} + D e^{-i m \theta}, \\ R_{\alpha, m}(r) = \begin{cases} c_1 \ln r + c_2, & \alpha = m = 0, \\ c_1 r^m + c_2 r^{-m}, & \alpha \neq 0, m = 0, \\ EJ_m(\alpha r) + FN_m(\alpha r), & \alpha \neq 0. \end{cases} \end{cases}$$

No todas estas funciones son soluciones de nuestro problema. **Como queremos que la solución  $u$  sea univaluada**  $\Rightarrow m = 0, 1, 2, \dots$ . La condición de contorno, que se impone sobre  $R_{\alpha, m}$ , determina las siguientes posibilidades

i)  $\alpha = m = 0 \Rightarrow c_2 = c_1 \ln 2 + c_2$  y así  $c_1 = 0$ . Luego,

$$R_{0,0} \propto 1.$$



ii)  $\alpha = 0, m \neq 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 2^m c_1 + 2^{-m} c_2$ . Por tanto,

$$R_{0,m}(r) \propto (1 - 2^{-m})r^m - (1 - 2^m)r^{-m}.$$

iii)  $\alpha \neq 0 \Rightarrow EJ_m(\alpha) + FN_m(\alpha) = EJ_m(2\alpha) + FN_m(2\alpha)$ . Por ello,

$$R_{\alpha,m}(r) \propto (N_m(\alpha) - N_m(2\alpha))J_m(\alpha r) - (J_m(\alpha) - J_m(2\alpha))N_m(\alpha r).$$

4. Resolver, por el método de desarrollo en autofunciones, el siguiente problema de contorno y condiciones iniciales para la ecuación del calor

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & t > 0, 0 < x < 1, \\ u|_{t=0} = x^3/3 - x^2/2, \\ \begin{cases} u_x|_{x=0} = 0, \\ u_x|_{x=1} = 0. \end{cases} \end{cases}$$

Determinar también el límite  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x)$ .

**Resolución** Al ser un problema de frontera de Neumann la base de Fourier a usar es  $\{\cos n\pi x\}_{n=0}^{\infty}$ . Así la solución  $u(t, x)$  se escribe como

$$u(t, x) = \frac{v_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) \cos(n\pi x),$$

donde, debido a que  $u$  resuelve la ecuación del calor, se debe cumplir

$$v_0(t) = v_0(0), \quad v_n(t) = v_n(0)e^{-n^2\pi^2 t}, \quad n = 1, \dots, \infty.$$

Más aún, las condiciones iniciales implican que

$$\begin{aligned} v_0(0) &= 2 \int_0^1 \left( \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) dx = -\frac{1}{6}, \\ v_n(0) &= 2 \int_0^1 \left( \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \cos(n\pi x) dx = \frac{4(1 - (-1)^n)}{n^4\pi^4}, \quad n = 1, \dots, \infty. \end{aligned}$$

Debemos subrayar que en la segunda integral hemos integrado por partes dos veces. Por todo ello concluimos que

$$u(t, x) = -\frac{1}{12} + \sum_{n \text{ impar}} \frac{8}{n^4\pi^4} e^{-n^2\pi^2 t} \cos(n\pi x).$$

Por último, el límite pedido es claro de la serie recién escrita

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x) = -\frac{1}{12}.$$

5. Las soluciones de la ecuación de Helmholtz en coordenadas esféricas son de la forma

$$[A_{lm}j_l(kr) + B_{lm}n_l(kr)]Y_{l,m}(\theta, \phi).$$

Determinar los valores de  $k$  para los que existen soluciones no triviales con  $l = 0$  del problema de contorno

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0, & 1 < r < 2, \\ u|_{r=1} = 0, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=2} = 0. \end{cases}$$

**Ayuda:**  $j_0(r) = \frac{\sin r}{r}, \quad n_0(r) = -\frac{\cos r}{r}.$

**Resolución** Nuestra solución tiene la forma

$$u(r, \theta, \phi) = (Aj_0(kr) + Bn_0(kr))Y_{0,0},$$

y las condiciones de frontera imponen

$$\begin{cases} Aj_0(k) + Bn_0(k) = 0, \\ Aj'_0(2k) + Bn'_0(2k) = 0. \end{cases}$$

Para que existan una solución no trivial es necesario que

$$\begin{vmatrix} j_0(k) & n_0(k) \\ j'_0(2k) & n'_0(2k) \end{vmatrix} = 0.$$

Esto es,

$$\begin{vmatrix} \sin k & -\cos k \\ 2k \cos(2k) - \sin 2k & 2k \sin 2k + \cos(2k) \end{vmatrix} = 0$$

que se escribe como

$$\boxed{\tan k = 2k.}$$

6. Determinar mediante el método de separación de variables las ondas estacionarias

$$u(t, \mathbf{x}) = e^{-i\omega t} w(\mathbf{x}), \quad \omega \geq 0,$$

del siguiente problema de contorno en coordenadas esféricas

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \Delta u, & r > 1, \\ u|_{r=1} &= 0, & u|_{r \rightarrow \infty} = 0. \end{aligned}$$

**Resolución** Si introducimos la propuesta de onda estacionaria en el problema de contorno para la ecuación de ondas se obtiene el siguiente problema de contorno para la ecuación de Helmholtz

$$\begin{aligned}\Delta w + \omega^2 w &= 0, \\ w|_{r=1} &= 0, \\ w|_{r \rightarrow \infty} &= 0.\end{aligned}$$

Como sabemos la separación de variables en coordenadas esféricas conduce a las siguientes soluciones de la ecuación de Helmholtz

$$R_l(r)Y_{lm}(\theta, \phi),$$

donde  $Y_{lm}$  son los armónicos esféricos y  $R_l$  es una función que toma una forma u otra dependiendo de si  $\omega$  es nulo o no. Cuando  $\omega = 0$  tenemos  $R_l(r) = ar^l + b/r^{l+1}$ , pero las condiciones de contorno imponen  $a = 0$  y  $a + b = 0$  luego la solución es trivial. Si  $\omega \neq 0$  la función radial es  $R_l(r) = aj_l(\omega r) + bn_l(\omega r)$ , donde  $j_l$  y  $n_l$  son las funciones de Bessel y Neumann esféricas respectivamente, satisfaciéndose de modo automático la condición de contorno en  $r \rightarrow \infty$ . La condición de contorno en  $r = 1$  impone que la función radial es proporcional a  $n_l(\omega)j_l(\omega r) - j_l(\omega)n_l(\omega r)$ . Por todo ello las ondas estacionarias pedidas son

$$ae^{-i\omega t}(n_l(\omega)j_l(\omega r) - j_l(\omega)n_l(\omega r))Y_{lm}(\theta, \phi), \quad \omega > 0,$$

con  $a$  una constante arbitraria.

7. Aplicando el método de desarrollo en autofunciones resolver el siguiente problema de condiciones iniciales y de contorno

$$\begin{aligned}u_{tt} - u_{xx} &= 0, \quad t > 0, \quad 0 < x < 2\pi, \\ u|_{t=0} &= x(x - 2\pi), \quad u_t|_{t=0} = 0, \\ u|_{x=0} &= 0, \quad u|_{x=2\pi} = 0.\end{aligned}$$

**Resolución** Para aplicar el método de desarrollo en autofunciones debemos calcular la solución de

$$\begin{aligned}-w_{xx} &= \lambda w, \\ w|_{x=0} &= 0, \\ w|_{x=2\pi} &= 0,\end{aligned}$$

que como sabemos tiene como autovalores a  $\lambda_n = n^2/4$  con autofunciones  $w_n(x) = \sin(nx/2)$ . Debemos desarrollar ahora las condiciones iniciales  $u|_{t=0} = g_1(x) := x(x - 2\pi)$ ,  $u_t|_{t=0} = g_2(x) = 0$  en términos de estas autofunciones. Por tanto, es necesario en cálculo de la serie de Fourier en senos de  $g_i(x)$ :

$$g_i(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{i,n} \sin(nx/2), \quad b_{i,n} := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(nx/2) g_i(x) dx,$$

las integrales se calculan de modo simple, y así  $b_{1,n} = \begin{cases} 0, & \text{para } n \text{ par,} \\ -\frac{32}{\pi n^3}, & \text{para } n \text{ impar.} \end{cases}$

El desarrollo en autofunciones de la solución es

$$u(t, x) := \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) \operatorname{sen}(nx/2),$$

donde  $v_n(t)$  es solución de

$$\begin{aligned} v_n(t)'' + n^2/4 v_n(t) &= 0, \\ v_n(0) &= b_{1,n}, \\ v_n'(0) &= b_{2,n}, \end{aligned}$$

con lo que  $v_n(t) = b_{1,n} \cos(nt/2)$ . Por tanto la solución pedida es

$$u(t, x) = -\frac{32}{\pi} \sum_{n \text{ impar}} \frac{1}{n^3} \cos(nt/2) \operatorname{sen}(nx/2),$$

que utilizando las identidades de adición de las funciones trigonométricas se convierte en

$$u(t, x) = \frac{1}{2} \left( \frac{32}{\pi} \sum_{n \text{ impar}} \frac{1}{n^3} \operatorname{sen}(n(x-t)/2) + \frac{32}{\pi} \sum_{n \text{ impar}} \frac{1}{n^3} \operatorname{sen}(n(x+t)/2) \right).$$

Recordando ahora los teoremas fundamentales sobre convergencia de series de Fourier, y denotando por  $g_{1,\text{impar}}$  a la extensión impar periódica de  $g_1$  obtenemos  $u(t, x) := \frac{1}{2}(g_{1,\text{impar}}(x+t) + g_{1,\text{impar}}(x-t))$ , que no es más que la fórmula de d'Alembert aplicada a este caso. La aproximación a un sólo término,  $-\frac{32}{\pi} \cos(t/2) \operatorname{sen}(x/2)$ , es excelente.

8. Resolver mediante la transformada de Fourier el problema

$$\begin{aligned} u_t + u_x - u_{xx} &= 0, \quad t > 0, \quad -\infty < x < \infty \\ u(x, 0) &= e^{-x^2}, \end{aligned}$$

**Ayuda:**  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-k^2/4}.$

**Resolución** Las funciones  $e^{ikx}$  son *autofunciones* de  $B = \partial/\partial x - \partial^2/\partial x^2$  con *autovalores*  $\lambda = ik + k^2$ . Por tanto, procede un *desarrollo en autofunciones* tipo transformada de Fourier:

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} c(k) e^{-(ik+k^2)t} e^{ikx} dk$$

donde

$$c(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-k^2/4}.$$

Por todo ello

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-k^2(t+1/4)} e^{-ik(t-x)} dk$$

con la siguiente notación

$$X := k, K := t - x, a = \sqrt{t + 1/4}$$

tenemos

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-a^2 X^2} e^{-iKX} dX = \boxed{\frac{1}{\sqrt{1+4t}} e^{-(t-x)^2/(1+4t)}}$$

9. Mediante el método de desarrollo en autofunciones determinar la solución del siguiente problema de contorno y de condiciones iniciales

$$u_t = u_{xx}, \quad t > 0, -1 < x < 1,$$

$$u|_{t=0} = x^2 \operatorname{sen}(\pi x),$$

$$u|_{x=-1} = 0, u|_{x=1} = 0.$$

**Ayuda:**

$$\int \operatorname{sen}(ax) \operatorname{sen}(bx) dx = \begin{cases} \frac{1}{2} \left( \frac{\operatorname{sen}((a-b)x)}{a-b} - \frac{\operatorname{sen}((a+b)x)}{a+b} \right), & a \neq b \\ \frac{1}{2} \left( x - \frac{\operatorname{sen}(2ax)}{2a} \right), & a = b. \end{cases}$$

**Resolución** La aplicación del MDA requiere en este caso de la resolución del problema de autovalores para  $-\frac{d^2 u}{dx^2} = \lambda u$  con  $u(-1) = u(1) = 0$ . Este problema de Dirichlet tiene como autovalores  $\lambda_n = n^2 \pi^2 / 4$  y autofunciones  $w_n(x) = \operatorname{sen}(n\pi(x+1)/2)$ . Por tanto, buscamos la solución  $u(x, t)$  en forma de serie

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}(x+1)\right).$$

Aquí,  $v_n$  debe ser solución de  $v'_n = -\lambda_n v_n$  y por ello  $v_n(t) = c_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{4} t}$  y el desarrollo es

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{4} t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}(x+1)\right).$$

Los coeficientes  $c_n$  son los coeficientes de Fourier de la condición inicial

$$c_n = \int_{-1}^1 x^2 \operatorname{sen}(\pi x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}(x+1)\right) dx.$$

Desarrollando el último factor del integrando y analizando la paridad de los integrandos que así resultan concluimos que

$$c_n = \begin{cases} 0 & n \text{ es impar,} \\ (-1)^m \int_{-1}^1 x^2 \operatorname{sen}(\pi x) \operatorname{sen}(m\pi x) dx & n = 2m \text{ es par,} \end{cases}$$

Integrando por partes dos veces la ayuda proporcionada concluimos que

$$c_n = \begin{cases} 0 & n \text{ es impar,} \\ -\frac{2\pi^2 - 3}{6\pi^2} & n = 2, \\ -\frac{8m}{(m^2 - 1)^2} & n = 2m \text{ es par y } n > 2. \end{cases}$$

Así obtenemos el resultado final

$$u(t, x) = -\frac{2\pi^2 - 3}{6\pi^2} e^{-\pi^2 t} \operatorname{sen}(\pi(x + 1)) - \sum_{m=2}^{\infty} \frac{8m}{(m^2 - 1)^2} e^{-m^2 \pi^2 t} \operatorname{sen}(m\pi(x + 1)).$$

10. Resolver mediante el método de desarrollo en autofunciones en coordenadas polares el siguiente problema de contorno para la ecuación de Laplace

$$\Delta u = 0, \quad 0 < r < 1, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \\ u|_{r=1} = \operatorname{sen}^2 \theta.$$

**Resolución** En coordenadas polares debemos resolver

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = 0, \quad 0 < r < 1, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \\ u|_{r=1} = \operatorname{sen}^2 \theta.$$

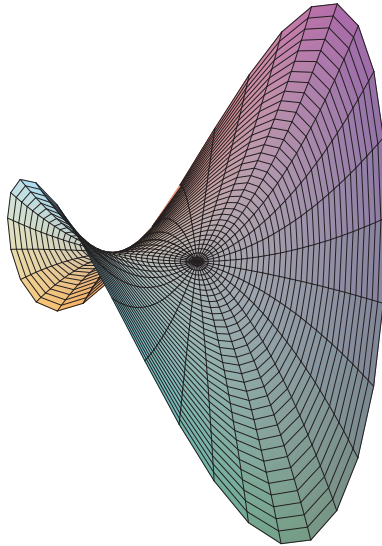
Para aplicar el MDA en primer lugar resolvemos el problema de autovalores para  $\frac{d^2}{d\theta^2}$  con condiciones de contorno periódicas:  $u(0) = u(2\pi)$ . Las autofunciones son  $\{1, \operatorname{sen} m\theta, \cos m\theta\}$  y los correspondientes autovalores  $\lambda_m$  son  $\{1, m^2\}$ . Por tanto desarrollamos la solución como

$$u(r, \theta) = v_0(r) + \sum_{m=1}^{\infty} (v_m(r) \cos m\theta + w_m(r) \operatorname{sen} m\theta).$$

Las funciones  $v_m, w_m$  se caracterizan por ser soluciones de  $r^2 v_m'' + r v_m' + \lambda_m v_m = 0$ . Teniendo en cuenta ahora la regularidad de la solución para  $r = 0$  concluimos que  $v_0 = c_0$  y que  $v_m = c_m r^m$  y  $w_m = d_m r^m$ , donde los coeficientes  $c_m, d_m$  los determina la condición de contorno  $\operatorname{sen}^2 \theta = 1/2 - 1/2 \cos(2\theta)$ . Por tanto el desarrollo de la solución es

$$u(r, \theta) = \frac{1 - r^2 \cos(2\theta)}{2}.$$

A continuación mostramos una gráfica para la solución



11. Resolver utilizando la transformada de Fourier el siguiente problema de condiciones iniciales para la ecuación del calor en el plano

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + u_{yy}, \quad t > 0, (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ u|_{t=0} &= x^2 e^{-x^2-y^2}. \end{aligned}$$

**Ayuda:**  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-ikx} dx = \sqrt{\pi} e^{-k^2/4}.$

**Resolución** La solución se expresa en términos de la transformada de Fourier

$$u(t, x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} v(t, k, q) e^{i(kx+qy)} dk dq$$

donde  $\frac{\partial v}{\partial t} = -(k^2 + q^2)v$  y por ello  $v = c(k, q) e^{-(k^2+q^2)t}$ . Así

$$u(t, x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} c(k, q) e^{-(k^2+q^2)t} e^{i(kx+qy)} dk dq$$

donde  $c(k, q)$  viene dado por

$$c(k, q) = -\frac{\partial^2}{\partial k^2} \mathcal{F}(e^{-x^2-y^2}) = -\frac{k^2-2}{16\pi} e^{-(k^2+q^2)/4}$$

y por ello

$$u(t, x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} -\frac{k^2-2}{16\pi} e^{-(k^2+q^2)/4} e^{-(k^2+q^2)t} e^{i(kx+qy)} dk dq.$$

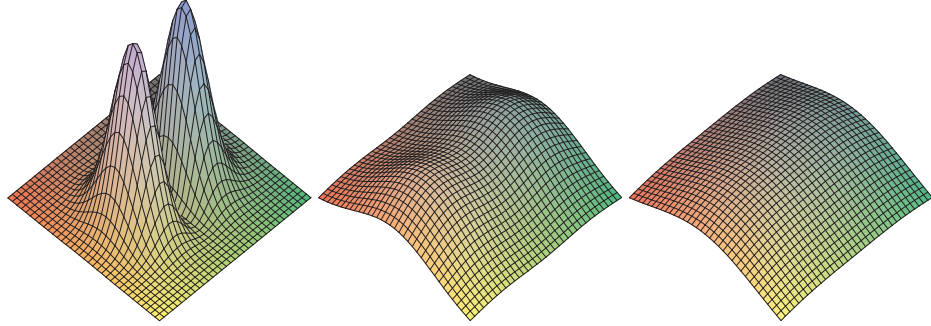
Esta integral se puede factorizar como sigue

$$u(t, x, y) = -\frac{\pi}{4} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (k^2-2) e^{-k^2(t+1/4)} e^{ikx} dk \right) \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-q^2(t+1/4)} e^{iqy} dq \right)$$

que podemos evaluar usando las propiedades de la transformada de Fourier para así obtener

$$u(t, x, y) = \left( \frac{2t}{1+4t} + \frac{4x^2}{(1+4t)^2} \right) e^{-\frac{x^2+y^2}{1+4t}}.$$

A continuación se muestra el proceso de termalización



12. Determinar las soluciones regulares de la ecuación de Helmholtz en coordenadas cilíndricas

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad 0 \leq r < a, z > 0$$

con las condiciones de contorno

$$u|_{r=a} = 0, \quad u|_{z=0} = 0.$$

**Resolución** Como sabemos las soluciones se expresan como combinaciones lineales de  $R_{\alpha,m}(r)\Theta_m(\theta)Z_\alpha(z)$  donde  $Z_\alpha = A_m e^{i\sqrt{k^2-\alpha^2}z} + D_m e^{-i\sqrt{k^2-\alpha^2}z}$ ,  $\Theta_m = C_m e^{im\theta} + D_m e^{-im\theta}$  y

$$R_{\alpha,m} = \begin{cases} c_1 \ln r + c_2 & \alpha = 0, m = 0, \\ c_1 r^m + c_2 r^{-m} & \alpha = 0, m \neq 0, \\ EJ_m(\alpha r) + FN_m(\alpha r) & \alpha \neq 0, m \neq 0. \end{cases}$$

Para tener continuidad en la variable angular  $\theta$  debemos tener  $m \in \mathbb{Z}$  en tanto que la regularidad en la variable radial para  $r = 0$  impone

$$R_{\alpha,m} = \begin{cases} c_2 & \alpha = 0, m = 0, \\ c_1 r^m & \alpha = 0, m \neq 0, \\ EJ_m(\alpha r) & \alpha \neq 0, m \neq 0. \end{cases}$$

La condición de contorno  $u|_{z=0} = 0$  implica que  $Z_\alpha = A_m \sin(\sqrt{k^2 - \alpha^2}z)$  y por último la condición de contorno  $u|_{r=a} = 0$  nos da

$$u_{m,j}(r, \theta, z) = EJ_m(\alpha_{m,j}r)(C_m e^{im\theta} + D_m e^{-im\theta})\sin(\sqrt{k^2 - \alpha_{m,j}^2}z),$$

donde

$$\alpha_{m,j} = \frac{c_{m,j}}{a}, \quad \text{siendo } \{c_{m,j}\}_{j=1}^\infty \text{ los consecutivos ceros de } J_m.$$



13. Determinar la solución del problema

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, \quad t > 0, 0 < x < 1, \\ u|_{t=0} &= \operatorname{sen}(\pi x), \\ \begin{cases} u_x|_{x=0} = 0, \\ u|_{x=1} = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

**Resolución** Para aplicar el método de desarrollo en autofunciones consideramos en primer lugar el problema de autovalores para  $B = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ ,

$$Bw = \lambda w, \quad \lambda = k^2$$

en el espacio  $\{w \in C^\infty([0, 1], w_x|_{x=0} = 0) \text{ y } w|_{x=1} = 0\}$ . Se deduce fácilmente que los autovalores son  $\lambda_n = k_n^2$  con  $k_n := (n + 1/2)\pi$  y las autofunciones  $w_n := \cos(k_n x)$ . Como las condiciones de contorno son separadas para un operador de Sturm-Liouville regular el espectro es no degenerado y el conjunto de autofunciones forma base ortogonal. Por ello, podemos desarrollar la inhomogeneidad  $\operatorname{sen}(\pi x)$  en esta base con

$$\operatorname{sen}(\pi x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(k_n x)$$

con

$$c_n = \frac{(w_n, \operatorname{sen}(\pi x))}{\|w_n\|^2} = \frac{1}{2} \int_0^1 \cos(k_n x) \operatorname{sen}(\pi x) dx = -\frac{2}{4n^2 + 4n - 3}.$$

El desarrollo en autofunciones será de la forma

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) w_n(x)$$

donde (ahora  $A = \partial/\partial t$  y  $Av + \lambda v = 0$ )

$$\frac{\partial v_n}{\partial t} + k_n^2 v_n = 0,$$

y  $v_n(0) = c_n$ .

Por ello, la solución es

$$u(t, x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2 + 4n - 3} e^{-(n+1/2)^2 \pi^2 t} \cos((n + 1/2)\pi x).$$

14. Dado el problema

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \\ u|_{r=1} &= 0, \\ u|_{r=2} &= 0. \end{aligned}$$

Determinar, mediante el método de separación de variables las soluciones  $u = u(r, z)$  independientes de  $\theta$ .

**Resolución** Estamos resolviendo la ecuación de Laplace, por ello las soluciones obtenidas por el método de separación de variables serán combinaciones lineales de

$$u = R(r)\Theta(\theta)Z(z)$$

donde

$$\begin{aligned} Z &= Ae^{\alpha z} + Be^{-\alpha z}, \\ \Theta &= Ce^{im\theta} + De^{-im\theta}, \\ R &= \begin{cases} c_1 \log r + c_2, & \alpha = 0, m = 0, \\ c_1 r^m + c_2/r^m, & \alpha = 0, m \neq 0, \\ EJ_m(\alpha r) + FN_m(\alpha r), & \alpha \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Como no queremos que aparezcan contribuciones dependientes de  $\theta$  ponemos  $m = 0$  y  $\Theta = 1$ . Por tanto las soluciones son  $u = R(r)Z(z)$  con

$$\begin{aligned} Z &= Ae^{\alpha z} + Be^{-\alpha z}, \\ R &= \begin{cases} c_1 \log r + c_2, & \alpha = 0, \\ EJ_0(\alpha r) + FN_0(\alpha r), & \alpha \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Imponiendo las condiciones de contorno  $R|_{r=1} = R|_{r=2} = 0$  vemos que  $\alpha \neq 0$  y que se debe tener

$$J_0(\alpha)N_0(2\alpha) = J_0(2\alpha)N_0(\alpha).$$

Esta ecuación trascendente determina los posibles valores de  $\alpha$ . La solución buscada es

$$u = e^{\pm \alpha z} (N_0(\alpha)J_0(\alpha r) - J_0(\alpha)N_0(\alpha r)).$$

15. Hallar la solución de la forma

$$u(t, \mathbf{x}) = \sin(t)w(\mathbf{x})$$

del siguiente problema de contorno en coordenadas esféricas

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \Delta u, \quad \pi/2 \leq r \leq \pi, \\ u|_{r=\pi/2} &= \cos \theta, \\ u|_{r=\pi} &= 0. \end{aligned}$$

Ayuda:  $Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$ .

**Resolución** La ecuación para  $w$  es

$$\begin{aligned} \Delta w + w &= 0, \quad \pi/2 \leq r \leq \pi, \\ w|_{r=\pi/2} &= \cos \theta, \\ w|_{r=\pi} &= 0. \end{aligned}$$

que es un problema de contorno para la ecuación de Helmholtz con  $k^2 = 1$ . Para aplicar el método de desarrollo en autofunciones, escribimos

$$\begin{aligned}\Delta + 1 &= A + B, \\ A &= r \frac{d}{dr} r + r^2, \\ B &= \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \sin \theta \frac{d}{d\theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d^2}{d\phi^2},\end{aligned}$$

y analizamos el problema de autovalores

$$BY = -\lambda Y$$

en  $C^\infty(S^2)$ . Recordemos que, en este caso, las autofunciones son los armónicos esféricos  $\{Y_{l,m}\}_{\substack{l=0,1,2,\dots, \\ m=-l,\dots,l}}$ , que forman una base ortonormal, con autovalores  $\lambda = -l(l+1)$ . Sólo tenemos un término inhomogeneo en una condición de contorno,  $g_1 = \cos \theta$ , para el que tenemos

$$g_1 = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{1,0}(\theta, \phi).$$

El desarrollo en autofunciones de la solución es

$$w = v(r) Y_{1,0},$$

donde

$$Av + \lambda v = 0$$

y por ello

$$v = c_1 j_1(r) + c_2 n_1(r)$$

donde las funciones esféricas de Bessel de orden 1 son

$$j_1 = \frac{\sin r}{r^2} - \frac{\cos r}{r}, \quad n_1 = -\frac{\cos r}{r^2} - \frac{\sin r}{r}.$$

Las condiciones de contorno  $r = \pi/2$  y  $r = \pi$  conducen al siguiente sistema para los coeficientes  $c_1$  y  $c_2$ .

$$\begin{aligned}\frac{2}{\pi} c_1 - c_2 &= \sqrt{\frac{\pi}{3}} \pi, \\ \pi c_1 + c_2 &= 0,\end{aligned}$$

que implica

$$c_1 = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\pi}{3}}, \quad c_2 = -\frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\pi}{3}}$$

y la solución es

$$u = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\pi}{3}} \sin(t) \cos(\theta) \frac{1}{r^2} ((1 + \pi r) \sin r + (\pi - r) \cos r).$$

### 3.7.3. Ejercicios

1. Una partícula cuántica en una dimensión espacial encerrada en una caja de longitud  $L$  es descrita por un problema de contorno del tipo:

$$\begin{cases} i u_t = -u_{xx}, & t > 0, 0 < x < L; \\ u|_{x=0} = 0, u|_{x=L} = 0. \end{cases}$$

Determinar las soluciones que proporciona el método de separación de variables.

2. Determinar las soluciones que proporciona el método de separación de variables para el problema de contorno:

$$\begin{cases} t \cdot u_t = u_{xx} + 2u, & t > 0, 0 < x < \pi; \\ u|_{x=0} = 0, u|_{x=\pi} = 0. \end{cases}$$

3. Determinar las soluciones que proporciona el método de separación de variables para el problema de contorno:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & t > 0, 0 < x < 1; \\ u|_{x=0} = 0, (u_x + \alpha u)|_{x=1} = 0, \end{cases}$$

4. El potencial de velocidades de un fluido estacionario en el interior de una tubería de sección rectangular es descrito por el problema de contorno:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 < x < L_1, 0 < y < L_2, -\infty < z < +\infty; \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\text{paredes}} = 0. \end{cases}$$

Determinar las soluciones proporcionadas por el método de separación de variables.

5. Bajo determinadas condiciones, ciertas componentes del campo electromagnético, en el interior de una guía de ondas de sección rectangular, son descritas por el problema de contorno:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 \Delta u, & 0 < x < L_1, 0 < y < L_2, -\infty < z < +\infty; \\ u|_{\text{paredes}} = 0. \end{cases}$$

Determinar las ondas estacionarias del modelo.

6. Determinar los estados estacionarios de una partícula cuántica encerrada en una caja cilíndrica de radio  $a$  y altura  $h$ .
7. El potencial de velocidades de un fluido estacionario, en el interior de una tubería de sección circular de radio  $a$ , es descrito en coordenadas cilíndricas por el problema de contorno:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < a, 0 \leq \theta < 2\pi, -\infty < z < +\infty; \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\text{pared}} = 0. \end{cases}$$

Determinar las soluciones proporcionadas por el método de separación de variables.

8. Probar que si  $Q(x)$  es una solución de la ecuación de Legendre,

$$(1 - x^2)Q'' - 2xQ' + \lambda Q = 0,$$

entonces la función

$$P(x) = (1 - x^2)^{\frac{|m|}{2}} \partial_x^{|m|} Q(x),$$

siendo  $m$  un número entero, satisface la ecuación:

$$(1 - x^2)P'' - 2xP' + \left(\lambda - \frac{m^2}{1 - x^2}\right)P = 0.$$

9. Bajo determinadas condiciones, ciertas componentes del campo electromagnético confinado entre dos esferas concéntricas son descritas por el problema de contorno en coordenadas esféricas:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 \Delta u, & a_1 < r < a_2, \quad 0 \leq \theta < \pi, \quad 0 \leq \phi < 2\pi \\ u|_{\text{paredes}} = 0. \end{cases}$$

Determinar las ondas estacionarias del modelo.

10. Una cuerda infinita sujeta por uno de sus extremos es descrita por el problema de contorno:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & -\infty < x < 0, \quad t > 0; \\ u|_{x=0} = 0. \end{cases}$$

Determinar las ondas estacionarias del problema e interpretarlas dinámicamente.

11. Bajo determinadas condiciones ciertas componentes de un campo electromagnético confinado en el interior de una caja de forma paralelepédica son descritas por el problema de contorno:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 \Delta u, & 0 < x < L_1, \quad 0 < y < L_2, \quad 0 < z < L_3; \\ u|_{\text{paredes}} = 0. \end{cases}$$

Determinar las ondas estacionarias del modelo e interpretarlas dinámicamente.

12. Resolver el problema de contorno

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ u|_{x=0} = 0, & u|_{x=a} = 0, \\ u|_{y=0} = x(a - x), & u|_{y=b} = 0, \end{cases}$$

utilizando el método de desarrollo en autofunciones.

13. Resolver el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} u_t = k u_{xx}, & t > 0, \quad 0 < x < l, \\ u(0, t) = h_1(t), & u(l, t) = h_2(t), \\ u(x, 0) = 0, \end{cases}$$

utilizando el método de desarrollo en autofunciones.

14. Una cuerda con los extremos fijos sometida a una fuerza exterior satisface el siguiente problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f_0 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{l}\right), & t > 0, 0 < x < l; \\ u|_{x=0} = 0, & u|_{x=l} = 0, \\ u|_{t=0} = 0, & u_t|_{t=0} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{l}\right). \end{cases}$$

Determinar su solución mediante el método de desarrollo en autofunciones.

15. Una partícula cuántica en un pozo infinito en una dimensión espacial obedece el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} i\hbar u_t = -\frac{\hbar^2}{2m} u_{xx}, & t > 0, 0 < x < l, \\ u(0, t) = 0, & u(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{l}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{l}\right). \end{cases}$$

Determinar su solución empleando el método de desarrollo en autofunciones.

16. Resolver el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} u_t = \Delta u, & 1 < r < 2, t > 0, \\ u|_{t=0} = \frac{1}{r} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} r\right), \\ \left(u + \frac{\partial u}{\partial n}\right)|_{r=1} = u|_{r=2} = 0. \end{cases}$$

17. Resolver el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + \frac{\operatorname{sen} 2r}{r} e^{-t}, & t > 0, \\ u|_{t=0} = \frac{\operatorname{sen} r}{r}. \end{cases}$$

18. Resolver el problema de contorno

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{C}{r}, & r > R, \\ u|_{r=R} = z, \\ \frac{\partial u}{\partial r}|_{r=R} = 0. \end{cases}$$

19. Considérese el problema de contorno en coordenadas cilíndricas:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < R, \\ u|_{r=R} = g(\theta). \end{cases}$$

Buscar soluciones independientes de  $z$  mediante el método de desarrollo en autofunciones.

20. Resolver el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} u_t = k u_{xx}, & t > 0, \quad 0 < x < l, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = h_1(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = h_2(t), \\ u(x, 0) = 0, \end{cases}$$

mediante el método de desarrollo en autofunciones.

21. Resolver el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} i \hbar u_t = -\frac{\hbar^2}{2m} u_{xx}, & t > 0, \quad 0 < x < l, \\ u(0, t) = u(l, t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) \\ u(x, 0) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 < x < \frac{l}{2}, \\ l - x, & \text{si } \frac{l}{2} < x < l. \end{cases} \end{cases}$$

22. Considérese un cilindro de radio  $R$  y altura  $h$  situado sobre el plano  $z = 0$ . Resolver el problema de contorno interior

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ u|_{z=h} = g(r, \theta), \\ u|_{\text{resto paredes}} = 0. \end{cases}$$





# APÉNDICE A

## Resumen de funciones especiales

Dada la ecuación  $u'' + p(x)u' + q(x)u = 0$ ,

$x_0$  punto ordinario  $\equiv p, q$  analíticas en un entorno de  $x_0$ .

$x_0$  punto singular  $\equiv x_0$  no ordinario.

$x_0$  punto singular regular  $\equiv x_0$  singular, y  $(x - x_0)p(x)$ ,  $(x - x_0)^2 q(x)$  analíticas en un entorno de  $x_0$ .

**Ejemplo 1:** oscilador armónico en Mecánica Cuántica.

$$-u'' + x^2 u = \lambda u \quad (\lambda = 2E), \quad -\infty < x < \infty$$

$$\lambda_n = 2n + 1 \quad (E_n = n + \frac{1}{2}), \quad n \geq 0$$

$$u_n(x) = H_n(x)e^{-x^2/2}, \quad H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \quad \text{polinomios de Hermite}$$

$$\left| \begin{array}{l} H_0(x) = 1 \\ H_1(x) = 2x \\ H_2(x) = 4x^2 - 2 \\ \vdots \end{array} \right. \quad (u_n, u_m) = \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = \delta_{nm} \sqrt{\pi} 2^n n!$$

**Ejemplo 2:** ecuación de Legendre.

$$-\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{du}{dx} \right] = \lambda u, \quad -1 < x < 1$$

$$\lambda_n = n(n+1), \quad n \geq 0$$

$$u_n(x) = P_n(x) \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n \quad \text{polinomios de Legendre}$$

$$\left| \begin{array}{l} P_0(x) = 1 \\ P_1(x) = x \\ P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\ \vdots \end{array} \right. \quad (u_n, u_m) = \int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \delta_{nm} \frac{2}{2n+1}$$

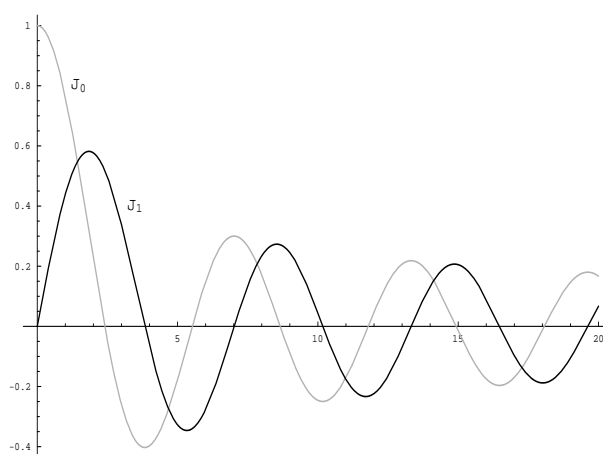
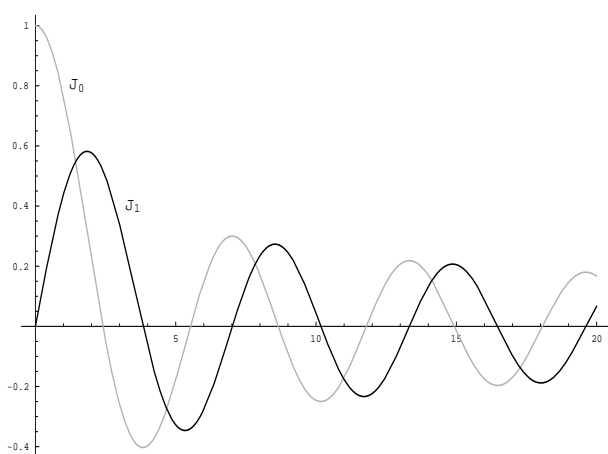
**Ejemplo 3:** ecuación de Bessel

$$-\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left( x \frac{du}{dx} \right) + \frac{\nu^2}{x^2} u = \lambda u, \quad (\nu \geq 0) \quad 0 < x < \infty$$

$$u(x) = c_1 J_\nu(\sqrt{\lambda}x) + c_2 N_\nu(\sqrt{\lambda}x)$$

$$\begin{cases} J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - (2\nu + 1)\frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-3/2}) \\ N_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - (2\nu + 1)\frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-3/2}) \\ x \rightarrow \infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} J_\nu(x) \sim \frac{(x/2)^\nu}{\Gamma(\nu + 1)} & \text{regular en } x = 0 \quad (\nu \text{ entero } \Gamma(\nu + 1) = \nu!) \\ N_\nu(x) \sim \begin{cases} \frac{2}{\pi} \log x, & \nu = 0 \\ -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi(2x)^\nu}, & \nu \neq 0 \end{cases} & \text{singular en } x = 0 \\ x \rightarrow 0 \end{cases}$$



$$\int_0^c x J_\nu^2(x) dx = \frac{1}{2} (c_\nu J'_\nu(c))^2, \quad J_\nu(c) = 0$$



# APÉNDICE B

## Soluciones de la ecuación de Helmholtz: $\Delta u + k^2 u = 0$

### • Cartesianas

$$u = X_{k_1}(x)Y_{k_2}(y)Z_{k_3}(z)$$

$$X_{k_1}(x) = a_1 e^{ik_1 x} + b_1 e^{-ik_1 x}, \quad Y_{k_2}(y) = a_2 e^{ik_2 y} + b_2 e^{-ik_2 y}, \quad Z_{k_3}(z) = a_3 e^{ik_3 z} + b_3 e^{-ik_3 z}$$

$$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = k^2, \quad \text{Re } k_i \geq 0$$

### • Cilíndricas

$$u = R_{\alpha,m}(r)\Phi_m(\theta)Z_{k,\alpha}(z), \quad \text{Re } m \geq 0, \quad \text{Re } \alpha \geq 0$$

	$\alpha = 0, m = 0$	$\alpha = 0, m \neq 0$	$\alpha \neq 0$
$R_{\alpha,m}(r)$	$C_1 \log r + C_2$	$C_1 r^m + C_2 r^{-m}$	$EJ_m(\alpha r) + FN_m(\alpha r)$

$J_m(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x - (2m+1)\frac{\pi}{4})$ $N_m(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin(x - (2m+1)\frac{\pi}{4})$
--

$$\Phi_m(\theta) = Ce^{im\theta} + De^{-im\theta}, \quad Z_{k,\alpha}(z) = Ae^{i\sqrt{k^2-\alpha^2}z} + Be^{-i\sqrt{k^2-\alpha^2}z}$$

### • Polares

$$u = R_{k,m}(r)\Phi_m(\theta), \quad \text{cuadro anterior con } \alpha = k \text{ en todos los lugares}$$

### • Esféricas

$$u = R_{k,l}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

	$k = 0$		$k \neq 0$		
$R_{k,l}(r)$	$A r^l + B r^{-(l+1)}$		$A j_l(kr) + B n_l(kr)$		$j_l(x) \sim \frac{1}{x} \cos(x - (l+1)\frac{\pi}{2})$ $n_l(x) \sim \frac{1}{x} \operatorname{sen}(x - (l+1)\frac{\pi}{2})$

	$l = 0$		$l = 1$
$j_l(x) = (-r)^l \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^l \frac{\operatorname{sen} r}{r}$ $n_l(x) = -(-r)^l \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^l \frac{\cos r}{r}$	$j_l(r)$ $n_l(r)$	$\frac{\operatorname{sen} r}{r}$ $-\frac{\cos r}{r}$	$\frac{\operatorname{sen} r}{r^2} - \frac{\cos r}{r}$ $-\frac{\operatorname{sen} r}{r} - \frac{\cos r}{r^2}$

$$Y_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$$

$$Y_{1,1} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \operatorname{sen} \theta e^{i\phi}, \quad Y_{1,-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \operatorname{sen} \theta e^{-i\phi}$$